航 空 学 报
Acta Aeronautica et Astronautica Sinica
Sep. 25 2020 Vol. 41 No. 9
ISSN 1000-6893 CN 11-1929/V
http://hkxb.buaa.edu.cn hkxb@buaa.edu.cn

引用格式：李旭，周洲，薛臣. 一种适合迭代求解的反馈力浸入边界法[J]. 航空学报，2020，41(9)：123712. LI X，ZHOU Z，XUE C. Feedback forcing immersed boundary method for iterative calculations[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica，2020，41(9)：123712 (in Chinese). doi：10.7527/S1000-6893.2020.23712

一种适合迭代求解的反馈力浸入边界法

李旭，周洲*，薛臣

西北工业大学 航空学院，西安 710072

摘 要：对 Goldstein 提出的反馈力浸入边界法进行了新的思考，改进了其对力源项的计算，拓展了该浸入边界法的使用范围。传统的反馈力浸入边界法在进行力源项的计算时，含有对速度误差的时间积分项，只能用于含时间项的 Navier-Stokes(N-S)方程的求解，且在显式时间推进时有严格的时间步长限制。本文改进的方法则直接通过迭代过程中的速度误差求和来计算力源项，避免了时间相关的参数，使其不仅能适合非定常隐式时间推进，还能与不含时间项的定常 N-S 方程求解方法结合。为了验证改进方法的可靠性，对二维静止圆柱绕流、静止流体中的振荡圆柱、运动椭圆翼以及三维静止圆球的流场进行了计算，计算结果均与文献结果符合较好，表明本文改进的方法是有效的。得出的结论为：可以直接基于迭代次数进行反馈力源项的计算，改进的反馈力浸入边界法不仅可与非定常 N-S 方程结合，进行隐式求解，还可以与定常 N-S 方程结合用于定常流动的模拟，可将改进的方法运用到更多的流动问题当中。

关键词：浸入边界法；反馈力源项；隐式格式；正交网格；运动边界

中图分类号：V211.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-6893(2020)09-123712-11

工程实际中存在大量的流固耦合问题，物体存在复杂的运动或变形，这给数值求解带来了困难。传统的贴体网格方法已经实现了对此类问题的计算，如动网格方法、嵌套网格方法。但是这些方法都不可避免地需要网格的运动，这就带来了新的问题。当物体出现大变形或大位移时，动网格方法计算可能会出现负网格，而嵌套网格方法则容易出现孤儿网格[1]，这都会影响计算的稳定性。

浸入边界法[2-3]采用笛卡尔网格进行计算，物面用一系列离散的 Lagrange 点表示，通过边界对周围流体网格施加力或直接施加速度边界条件来等效物体对流体的作用。在对运动边界进行计算时，只需要改变 Lagrange 点的作用区域，并不需要流体网格的运动，避免了传统贴体网格方法网格的变形或运动，不仅保证了网格质量，还降低了复杂几何的网格生成难度。经过多年的发展，目前已经出现了许多种不同形式[4-5]的浸入边界法。Goldstein 的反馈力浸入边界法(又称虚拟边界法，Virtual Boundary Method)正是这些方法中的一种[6-7]。该方法基于非定常 Navier-Stokes(N-S)方程提出，其吸取了控制理论中反馈的思想，分别采用积分和比例环节，利用物面的速度误差计算力源项，并利用力源不断对流场进行反馈，最终实现无滑移边界条件。该方法形式简单，不用对物体内外的流体网格单元进行区分，也不用对已有求解器进行大的改动，因此方便使用[8-9]，已经成功应用到了柔性变形[10-12]、扑翼运动[13-15]、叶栅颤振[16-19]、多相流计算[19]等问题上。

Goldstein 的反馈力浸入边界法含有对时间的积分项，这也是目前国内外学者将该方法与非定常 N-S 方程求解结合的原因之一。对控制方

收稿日期：2019-12-06；**退修日期**：2020-04-07；**录用日期**：2020-05-15；**网络出版时间**：2020-05-29 14:24
网络出版地址：http://hkxb.buaa.edu.cn/CN/html/20200903.html
基金项目：装备预研项目(41411020401，41411010403)；大院大所创新计划(TC2018DYDS24)
* **通信作者**. E-mail：zhouzhou@nwpu.edu.cn

程的求解采用的方法包括谱方法[9]、投影法[15,20]、格子玻尔兹曼方法[21]等，多为显式时间推进。Goldstein 的反馈力方法在应用时有两个不便：第一，积分和比例环节的反馈系数需要人为给定；第二，计算存在稳定性问题。原始的反馈力浸入边界法在进行显式计算时，出于稳定性的要求，求解方法有非常严格的时间步长限制[20,22]。显式计算本来就有稳定性要求，采用反馈力浸入边界法后，受反馈力系数取值的影响，计算的时间步将必须取得很小，不然会引起发散，这降低了求解的效率。文献[21]指出 Lee 研究了在采用反馈力浸入边界法时不同时间推进方法的稳定性范围，对比了 Adams-Bashforth 格式与 Runge-Kutta 格式的差异，结果表明 Runge-Kutta 类方法稳定性较强，但 CFL(Courant-Friedrichs-Lewy)数仍不能超过 1。Shoele 和 Zhu[12]将加权隐式 Crank-Nicolson 格式与反馈力浸入边界法结合，但反馈力源项仍然按照时间步进行更新，为保证格式的有界性，时间步长仍要受到限制。

由此可知，显式求解制约了反馈力浸入边界法发挥作用。与此相对，隐式方法通常是无条件稳定的，计算时可采用更大的时间步，更加适合实际的工程计算。因此，将隐式求解方法与反馈力浸入边界法结合是一种不错的选择。另外，对于一些不可压的定常流动，往往可直接利用松弛迭代方法对不含时间项的 N-S 方程进行求解，如果能将反馈力浸入边界法与这类定常求解方法结合，将进一步拓展该方法的使用范围，但目前还未见到这方面研究公开发表。

基于以上思考，本文对 Goldstein 的反馈力浸入边界法进行了改进，将原始方法中的时间积分项改为对迭代次数的求和。与原始方法相比，改进的方法不再含有与时间相关的参数。本文对一系列的定常与非定常算例进行了计算，结果表明改进后的方法可同时用于定常与非定常 N-S 方程的求解，这为以后反馈力浸入边界法的应用提供了新的选择。

1 数值计算方法

1.1 控制方程

非定常不可压的 N-S 方程组为

$$\begin{cases}\rho\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right)+\nabla p=\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}(x,t)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{1}$$

式中：ρ 为密度；p 为压力；μ 为层流黏性系数；$\boldsymbol{F}(x,t)$ 为流体的力源项，其计算公式为

$$\boldsymbol{F}(x,t)=-\int \boldsymbol{f}(x_s,t)\delta(x-x_s)\mathrm{d}x_s\tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{f}(x_s,t)$ 为物体的力源项；$\delta(x-x_s)$ 为 Delta 函数[23]，积分前的负号表示物体的力源与流体的力源方向相反。Goldestein 的反馈力浸入边界法计算物体的力源项的表达式为

$$\boldsymbol{f}(x_s,t)=\alpha'\int_0^t(\boldsymbol{u}(x,t)-\boldsymbol{u}(x_s,t))\mathrm{d}t+\beta'(\boldsymbol{u}(x,t)-\boldsymbol{u}(x_s,t))\tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{u}(x,t)$ 为流体计算得到的物面速度，可通过 Delta 函数计算得到；$\boldsymbol{u}(x_s,t)$ 为物面真正的速度。式(3)含有两个待定参数：α' 和 β'，需要人为给定，控制原理如图 1 所示。

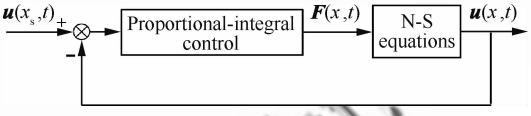


图 1 反馈力浸入边界法原理

Fig. 1 Principle of feedback forcing immersed boundary method

图 1 中的比例积分环节代表式(3)，通过每个时间步的速度误差反馈，使 $|\boldsymbol{u}(x,t)-\boldsymbol{u}(x_s,t)|$ 趋于 0，从而实现无滑移边界条件。

Delta 函数是物面节点与流场网格单元信息交流的关键，其形式并不唯一，本文选用的 Delta 函数为

$$\delta(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(3-2|r|+\sqrt{1+4|r|-4r^2}) & 0\leqslant|r|<1\\ \dfrac{1}{8}(5-2|r|-\sqrt{-7+12|r|-4r^2}) & 1\leqslant|r|<2\\ 0 & |r|\geqslant 2\end{cases}\tag{4}$$

阻力系数的计算参考文献[20]，表达式为

$$N_x=\int_{\partial S}f_x\mathrm{d}s+\rho\frac{\mathrm{d}u_{c,x}}{\mathrm{d}t}V\tag{5}$$

式中：右边第 1 项表示物面上力源的积分，S 指物体表面，f_x 为反馈力法计算物面上一点 x 方向的

动量源项;第 2 项反映运动加速度的效应,V 表示物体的体积;$u_{c,x}$ 表示物体质心平动速度在 x 方向的分量。同理可得物体其他方向的受力。本文所有算例的密度均取为 $\rho=1.0\ \mathrm{kg/m^3}$。需说明的是,本文在采用式(2)计算时,反馈力参数均取正值。

1.2 反馈力浸入边界法的改进

Goldstein 的反馈力浸入边界法(后文统称原始方法)与显式求解方法结合将严重限制计算的效率,难以在工程应用中推广。而隐式格式通常没有稳定性的限制,将反馈力浸入边界法与隐式格式结合,是一种有效的解决办法,也能更好地发挥反馈力浸入边界法的优点,这正是本文改进方法的出发点。

在进行数值计算时,Goldstein 反馈力的计算公式可写为

$$\boldsymbol{f}(x_s,t)=\alpha'\sum_{i=1}^{N'}(\boldsymbol{u}(x,\Delta t\cdot i)-\boldsymbol{u}(x_s,\Delta t\cdot i))\Delta t+\beta'(\boldsymbol{u}(x,t)-\boldsymbol{u}(x_s,t)) \tag{6}$$

式中:i 表示时间步数,$t=N'\cdot\Delta t$,N' 表示当前的时间步数。即式(3)中对时间的积分项化为了对时间步的求和。通过对不同时间步的速度误差进行反馈来最终满足物面边界条件,这是目前国内外学者计算时采用的通用方式。

从纯反馈的原理出发,通过对式(6)进行分析,本文认为既然 α' 和 β' 需要人为给定,可以对其重新进行定义,令 $\alpha=\alpha'\cdot\Delta t$,$\beta=\beta'$,则可得

$$\boldsymbol{f}(x_s,N)=\alpha\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{u}(x,i)-\boldsymbol{u}(x_s,i))+\beta(\boldsymbol{u}(x,N)-\boldsymbol{u}(x_s,N)) \tag{7}$$

式中:N 表示当前计算的迭代次数。式(7)不含时间相关的参数,积分环节转化为不同次迭代速度误差的求和,而非式(6)中不同时间步速度误差的求和,这是与原始方法最大的不同之处。相同的是,仍然是通过对流场速度误差的反馈来计算力源项。相比式(6),改进后的方法有两方面的好处:第一,由于不含时间相关参数,可直接与一些定常 N-S 方程迭代求解方法结合;第二,在非定常计算时,通过迭代次数来计算力源项更加适合隐式求解,因为隐式推进一个时间步内往往有多次迭代的要求。

进一步来看,方程求解的迭代过程就是流域内的网格单元速度不断调整,达到收敛,从而与给定边界条件相适应的过程,这正好与控制系统中的反馈作用相类似。当实际的输出量与给定值存在偏差时,系统就不断通过误差反馈来减小偏差,从而使得输出量等于给定值。也就是说,直接利用迭代过程中的速度误差来计算力源项,并将其反馈给流体以期实现无滑移边界条件是可行的,反馈原理的本质不应与 N-S 方程的具体求解方法有关。

因此,改进的方法将具有更大的适用性。本文改进的方法不仅能与含有时间项的 N-S 方程进行结合,还能与不含时间项的 N-S 方程进行迭代求解,本文将对这一观点进行验证。

Fluent 是目前一款应用较广泛的 CFD 商业软件,其基于有限体积法,求解器分为两大类:密度基和压力基。密度基求解器定常与非定常计算均按照时间推进求解,压力基求解器则不同。对于定常计算,压力基求解器求解的是不含时间项的 N-S 方程,非定常计算才含有时间项,且为隐式时间推进[24]。本文选用压力基求解器,基于软件中的用户自定义函数(User-Defined Functions, UDFs),通过一系列定常与非定常算例的计算,验证本文改进反馈力浸入边界法的有效性。

各个算例空间离散均采用二阶精度。对于非定常计算,时间推进则采用一阶隐式。定常计算可直接根据迭代进行力源的更新。对于非定常隐式计算,改进方法的实施步骤如下:

步骤 1 初始化,读入物面 Lagrange 点坐标。

步骤 2 每个时间步开始,如果物面位置发生变化,则更新 Lagrange 点,并在本时间步的迭代过程中保持其坐标不变。根据迭代次数,利用改进方法进行力源项的更新,并将其添加到动量方程中,参与控制方程的求解。

步骤 3 待本时间步迭代收敛,利用最终的力源进行本时间步物体受力的计算。

步骤 4 重复步骤 2 和步骤 3,进行下一时间步的计算。

反馈力源的计算在 DEFINE_ADJUST 宏中进行,并通过 DEFINE_SOURCE 宏将其加给动量方程。关于 UDF 更多的使用细节,可参考 Fluent 自带的 UDF Manual 进行了解。

2 改进反馈力浸入边界法的验证

2.1 静止圆柱绕流

对静止圆柱绕流的计算是验证数值方法的经典算例。首先，本文对雷诺数 $Re=40$ 时静止圆柱的流动进行了计算，以此来验证本文改进的反馈力方法在定常 N-S 方程求解时的有效性。采用 Fluent 压力基求解器中两种不同的定常计算方法，控制方程求解均不含时间项，进行松弛迭代求解。此时由于计算不再是时间推进求解，Goldstein 的原始公式不再适用。

圆柱表面均匀分布 75 个 Lagrange 点，所在流域采用均匀网格，网格间距 Δx 的选取采用文献[25]的方法，计算网格量为 29 380。

如图 2 所示，计算源项时需要对网格单元进行搜索，为减少搜索的范围，流体网格被分成了内外两个域。圆柱阻力系数的定义为

$$C_D=\frac{N_x}{0.5\rho U_\infty^2 D} \tag{8}$$

式中：U_∞ 为自由来流速度，$U_\infty=5.84$ m/s；D 为圆柱直径，$D=1\times10^{-4}$ m。采用矩形计算域，$60D\times40D$。入口采用速度入口，出口采用压力出口，上下边界设置为对称边界条件，空间离散采用二阶精度。将分别基于 Simplec 和 Couple 算法对静止圆柱绕流进行计算。其中 Simplec 为分离式求解（经典的压力修正算法），Couple 则为耦合式求解，以此来检验改进方法对不同求解格式的可靠性。

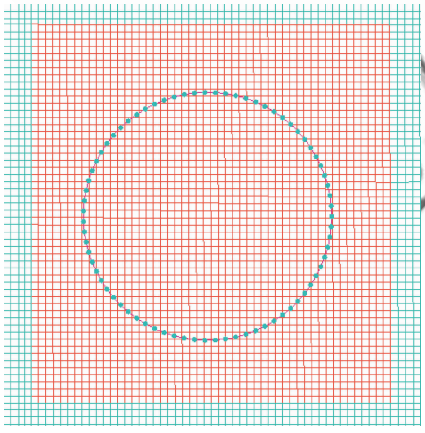


图 2 计算网格分布

Fig. 2 Grid distribution in simulation

确定好网格和边界条件后，就需要对 α 和 β 进行取值。虽然反馈原理的本质不变，但 α 和 β 的取值会影响到反馈的效果。α 和 β 选取过大，会引起计算振荡，甚至导致显式计算发散；选取过小，会使得收敛变慢[9]。正如前文所说，目前并没有理论的方法确定 α 和 β 的最优值，这与计算状态和求解器本身相关，本文选取的值也是经过尝试确定的。

本文研究了 α 和 β 的取值对计算结果的影响。由于物体静止，式(5)中的第 2 项为 0。基于 Simplec 算法，对比不同反馈力参数对计算收敛的影响，结果如图 3 所示。

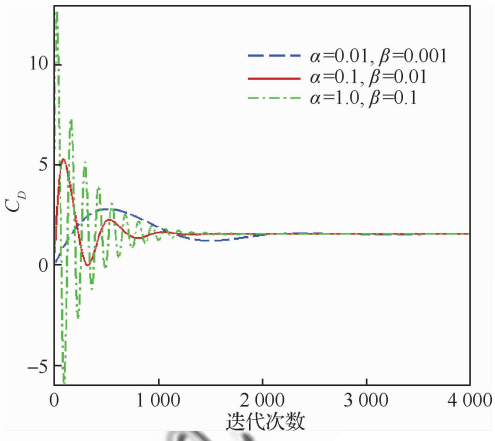


图 3 反馈力参数对收敛的影响

Fig. 3 Influence of feedback forcing parameters for iteration

在 3 种不同取值下，阻力系数均收敛到了相同值。取 $\alpha=1.0$，$\beta=0.1$ 时，阻力系数的振荡比较明显，即超调量大；取 $\alpha=0.01$，$\beta=0.001$ 时，阻力系数波动幅值较小，但达到平稳速度较慢。因此，确定本算例反馈力参数 $\alpha=0.1$，$\beta=0.01$。

在计算过程中，每进行一次迭代，反馈力的源项都会得到更新，再将式(7)的力源分布到周围的流体网格上，进行下一次迭代，如此反复进行，直到计算收敛。

取 Simplec 计算收敛后流场的流线如图 4 所示。由于雷诺数较小，可以看出圆柱后方形成了两个对称、稳定的分离涡。表 1 是计算得到的圆柱绕流特征参数（阻力系数 C_D 和无量纲回流区长度 L/D），分别是两种求解方法与改进的反馈力浸入边界法结合（表中用 Simplec 和 Couple 表

示),并与文献[26-28]的结果对比。通过圆柱绕流特征参数的对比可知,本文计算得到的圆柱阻力系数和回流区的长度与文献符合较好。

再取圆柱表面的压力系数 C_p 与文献[29]对比,如图 5 所示。可以看出,本文改进方法计算的压力系数与文献[29]给出的计算结果符合很好,表明本文改进的反馈力浸入边界法是有效的。不同于原始方法,本文改进的方法能用于不含时间项 N-S 方程的迭代求解,且反馈力系数取值对收敛结果没有大的影响。由于 Simplec 计算求解速度快,本文以后的计算均采用 Simplec 算法。

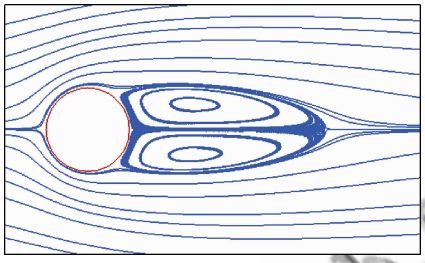


图 4 圆柱流线($Re=40$)

Fig. 4 Streamlines on circular cylinder at $Re=40$

表 1 $Re=40$ 阻力系数和回流区长度对比

Table 1 Comparison of drag coefficient and recirculation length at $Re=40$

方法	C_D	L/D
文献[26]	1.58	2.35
文献[27]	1.54	2.36
文献[28]	1.565	2.31
本文 Simplec	1.56	2.36
本文 Couple	1.56	2.36

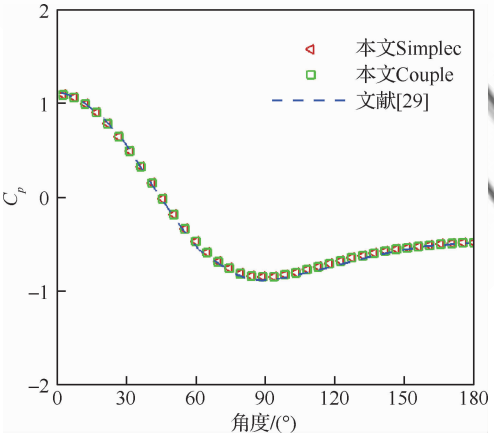


图 5 静止圆柱压力系数

Fig. 5 Pressure coefficient for stationary circular cylinder

以上计算求解的是不含时间项的 N-S 方程,为验证改进方法在非定常隐式求解上的有效性,本文对 $Re=40$ 时的圆柱绕流进行了非定常模拟。同样基于 Simplec 算法,对含有时间项的 N-S 方程进行求解,对原始反馈力浸入边界法与改进方法的收敛效果进行对比。

在进行隐式计算时,原始方法的源项是按照时间步进行计算的,则每个时间步只在最开始进行更新,一个时间步内其值保持不变。本文改进方法的源项基于迭代次数计算,每一次迭代后源项均会得到修正,一个时间步内其值一般是变化的。

时间步长取为 0.002 s,一个时间步内迭代 20 次,采用相同的计算设置,对两种方法的收敛特性进行对比。图 6 为阻力系数的收敛曲线。可以看出,采用原始方法进行隐式计算时收敛较慢,特别是在快接近稳定值的时候,最终到 500 个时间步才完全收敛。而本文改进的方法则很快收敛,阻力在 100 个时间步后就达到平稳。

参考文献[14],定义 CFL 数为

$$\mathrm{CFL}=\frac{U_\infty \Delta t}{\Delta x}$$

式中:$\Delta x=2.96\times10^{-6}$ m,为圆柱周围 Euler 网格尺寸。本文改进方法隐式计算与文献显式结果对比如表2所示。由于本文是隐式求解,与显式

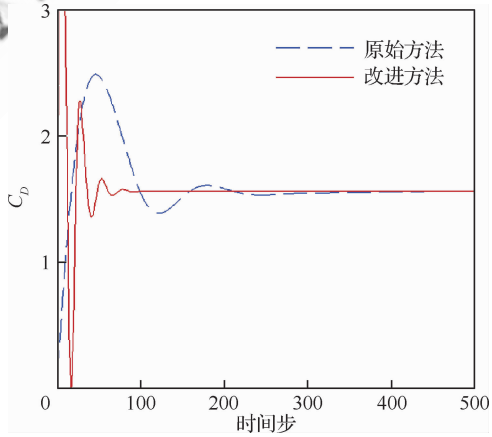


图 6 静止边界隐式计算收敛效率对比

Fig. 6 Comparison of efficiency for implicit iterations at stationary boundary

计算[8, 14]相比，CFL 数可以取的很大，这也体现了隐式求解的好处。

从数值求解上来看，在代数方程求解的过程中，源项影响的是方程组的常数项。隐式求解每一次迭代都修正源项，使得源项与速度场的同步性得到改善，能起到加速收敛的作用。也就是说，改进的方法更加适合非定常隐式求解。

表 2 $Re=40$ 时隐式与显式结果对比

Table 2 Comparison of implicit and explicit results at $Re=40$

方法	CFL	C_D
本文方法	3 946	1.56
文献[14]	0.2	1.66

2.2 振荡圆柱

为验证改进方法对运动边界模拟的可行性，选取静止流体中往复振动的圆柱[29-30]进行非定常计算，采用 Simplec 算法求解不可压非定常 N-S 方程，通过与文献对比来验证本文方法在运动物体求解上的有效性。

本算例计算域的大小取为 $40D\times 40D$，圆柱将在水平方向进行往复运动，平衡位置在原点处，运动方程为

$$x(t) = -A\sin(2\pi ft) \tag{9}$$

式中：x 为圆柱水平方向位移；A 为振动幅值；f 为振动频率。

在本算例中，影响计算结果的关键参数为雷诺数 Re 和 KC(Keulegan-Carpenter)数，分别定义为

$$Re = \frac{\rho_\infty u_{\max} D}{\mu},\ \mathrm{KC} = \frac{u_{\max}}{fD} \tag{10}$$

式中：$u_{\max}$ 为圆柱振动的最大速度，$u_{\max} = 2\pi fA$。本文选取 $Re=100$，KC=5。

参考文献[8]，四周远场边界设置为无剪切的物面条件。由于采用隐式计算，一个周期只取 360 个时间步，每个时间步内迭代次数为 20 次。反馈力参数取值见表 3。

对于圆柱表面运动速度的计算，可直接对式(9)求导获得，然后将该速度代入式(7)中进行力源项的计算。在一个时间步内，圆柱的位置不会变化，每迭代一次，流场速度得到更新，反馈力源项就会进行更新，然后再将其添加到动量方程中，进行下一次迭代，直到该时间步收敛。

表 3 不同算例反馈力参数

Table 3 Feedback parameters for different cases

算例名称	α	β
静止圆柱	0.1	0.01
振荡圆柱	0.1	0.01
运动椭圆翼	0.2	0.02
静止圆球	50	0.1

与 2.1 节相同，流场网格分为了两个域，内区域网格量为 40 000，圆柱运动过程都在其中，外区域网格量为 31 824，总计网格为 71 824，物面有 75 个 Lagrange 点。在计算过程中，只对圆柱所在区域的网格进行搜索判断以及反馈力源项的赋值。运动稳定后，得到流场不同时刻的压力及涡量如图 7 所示。

图 7 中涡量的正负分别用虚线和实线表示，当圆柱向远离平衡位置方向运动时，其后会形成两个强度相同、方向相反的对称涡；而当圆柱向平衡位置返回时，其将分开之前形成的这对涡，并改

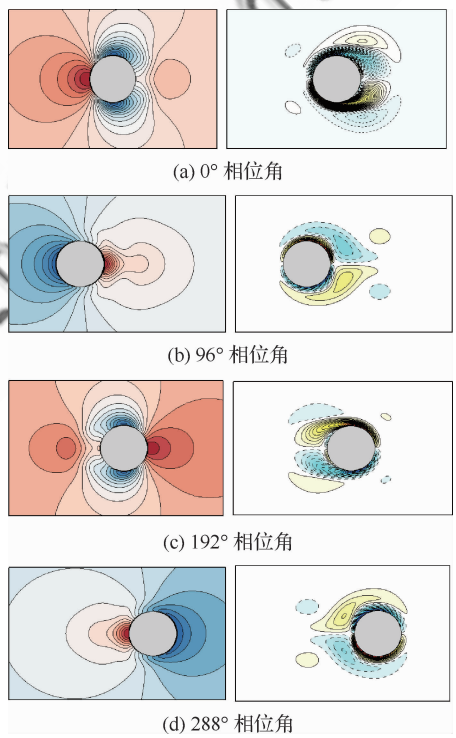


图 7 不同相位下的涡量/压力等值线

Fig. 7 Vorticity/pressure contours at different phase angles

变涡的旋转方向，这种现象与文献[30]一致。

阻力系数定义为 $C_D=\dfrac{N_x}{0.5\rho u_{\max}^2 D}$，采用相同设置，对原始方法与改进方法收敛情况进行对比，如图 8 所示。从图 8 可知，原始方法隐式计算时阻力系数振荡明显，400 个时间步后才稳定下来，这主要是因为运动物体速度场初期变化较大，原始方法对速度场的响应不够快。与此相反，改进方法在迭代数个时间步后，就立刻进入稳定的非定常状态，表现了更好的收敛性。

取改进方法计算的圆柱一个周期的阻力曲线与文献进行对比，如图 9 所示。可以看出，阻力的最大、最小值并不是在特殊相位（$t=0.25nT$，n 为正整数，T 为振动周期）时取得，这与圆柱运动过程中流体的惯性有关，表现出了迟滞特性，计算得到的振动圆柱阻力的变化与文献[30]符合较好。

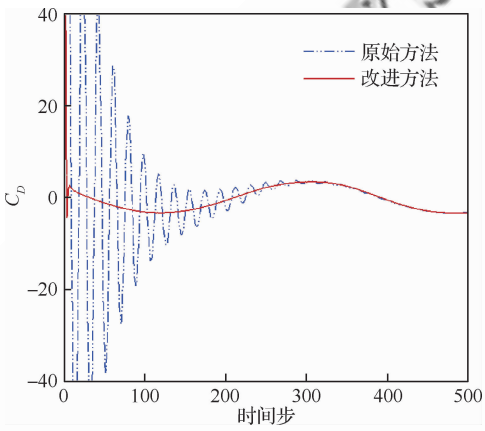


图 8 运动边界隐式计算效率对比

Fig. 8 Comparison of efficiency for implicit iterations at moving boundary

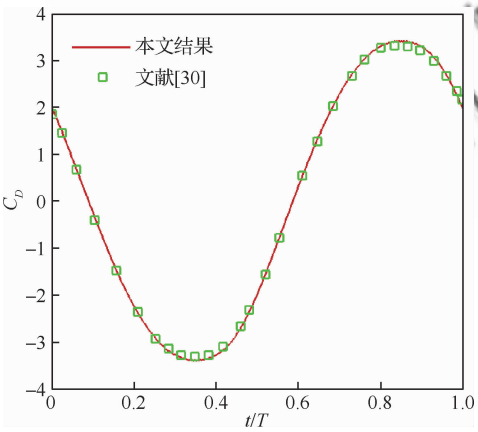


图 9 阻力系数变化曲线

Fig. 9 Time history of drag coefficient

以上结果表明本文改进的反馈力浸入边界法可与隐式求解方法结合，对运动物体进行迭代计算，且收敛效果优于原始方法。

2.3 运动椭圆翼

振动圆柱只有一个方向的运动，椭圆翼的运动要更加复杂，其不仅有平动，还有绕自身质心的转动，可用其来研究昆虫翅膀运动时非定常流动机理[31]。本节将选取静止流体中的椭圆翼来验证本文改进方法对物体复杂运动的模拟能力。

椭圆翼运动如图 10[31]所示，质心的平动和绕质心的转动规律为

$$A(t)=\frac{A_0}{2}\left[\cos\left(\frac{2t}{A_0}\right)+1\right] \tag{11}$$

$$\theta(t)=\theta_0\left[1-\sin\left(\frac{2t}{A_0}\right)\right] \tag{12}$$

式中：运动周期 $T=\pi A_0$；平动幅值为 $A_0=2.5$ m；转动幅值 $\theta_0=\dfrac{\pi}{4}$；质心平动曲线与 x 轴夹角 $\beta_0=\dfrac{\pi}{3}$。椭圆翼质心初始坐标为 $\left(\dfrac{A_0}{2},\dfrac{\sqrt{3}A_0}{2}\right)$，其将先向左下方拍动，然后再向右上方拍动，质心最大平动速度 $u_{\max}=1$ m/s，雷诺数 $Re=\dfrac{\rho u_{\max}c}{\mu}$，$Re=157$。

阻力系数和升力系数的定义分别为

$$C_D=\frac{N_x}{0.5cu_{\max}^2},\quad C_L=\frac{N_y}{0.5cu_{\max}^2} \tag{13}$$

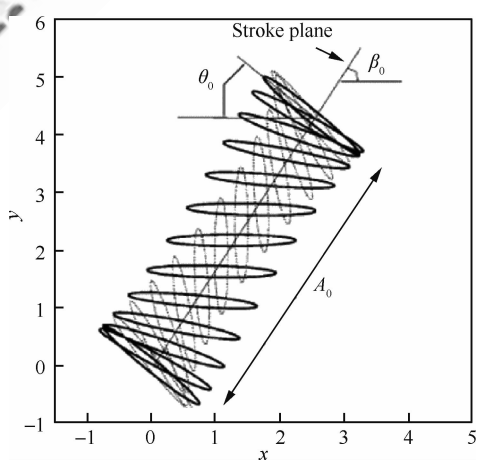


图 10 椭圆翼运动路径[31]

Fig. 10 Flapping path of ellipse wing[31]

式中：c 为椭圆翼的长轴长，取 $c=1$ m。椭圆翼的短轴长 $b=0.25$ m。一个周期 T 分为 360 个时间步，内迭代次数为 20。选取计算域为 $80c\times80c$，四周远场边界采用无剪切壁面，总网格量为 164 160。由于运动比较复杂，物面取 150 个 Lagrange 点。

计算稳定后，得到椭圆翼运动周期内不同时刻的涡量图如图 11 所示。在向下运动过程中，椭圆翼前后缘会产生一对反向旋转的涡（$t=0.25T$），由于椭圆翼自身的旋转作用，这对涡将逐渐靠近（$t=0.44T$）。在向上扑动过程中，之前形成的这对涡会从椭圆翼表面脱落（$t=0.74T$），形成一对相互作用的偶极子，并向下运动（$t=0.99T$）。

得到椭圆翼的阻力和升力变化规律如图 12 所示。可以看出，由于椭圆翼流场非定常特性明显，其气动力变化并不是简单的正弦曲线。另外，本文计算的椭圆翼的升力阻力变化与文献[14]基本一致，且相比文献[14]，计算没有明显的数值振荡，表明可以利用本文改进的方法进行隐式计算，对复杂的非定常运动进行模拟。

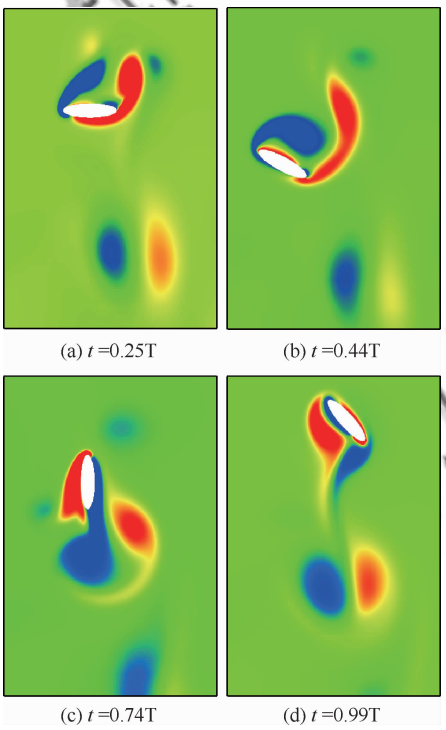


图 11 一个周期内不同时刻的涡量图

Fig. 11 Vorticity fields during one period

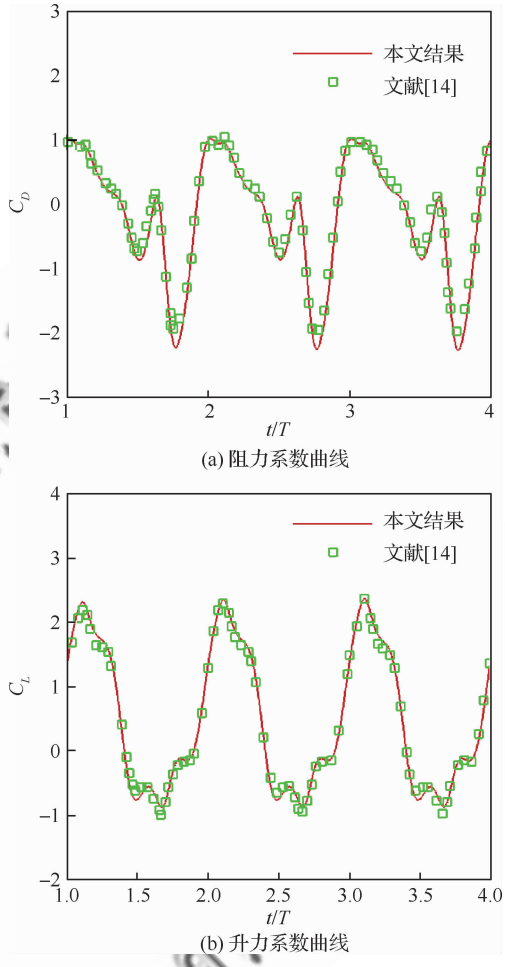


图 12 扑动过程中的气动力曲线

Fig. 12 Curves of aerodynamic coefficients during flapping

2.4 静止圆球

为进一步验证本文方法对三维物体模拟的可靠性，选取静止圆球进行定常计算，求解不含时间项的 N-S 方程。采用 Simplec 算法，计算域大小为 $80D\times60D\times60D$，$D=0.001$ m。

为减少网格量，本文在圆球所处的流域进行了局部网格加密，如图 13 所示，加密后总的网格量为 282 万。远场边界分别采用速度入口和压力出口。

圆球表面的网格如图 14 所示，采用三角形单元来离散球面，共计有 3 860 个单元。来流速度分别取 15 m/s 和 25 m/s，对 $Re=150$ 和 $Re=250$ 时的圆球绕流进行计算，得到流场如图 15 所示。可以看出，在 $Re=150$ 时，绕圆球的流动是轴对

称的。但在 $Re=250$ 时，虽然圆球本身是轴对称的，但流动的对称性减弱，x-y 面的流动和 x-z 面的流动存在差异，流场只存在面对称，即上下对称。由于 x-z 面涡不对称，圆球产生了侧力，但流动依旧保持稳态。

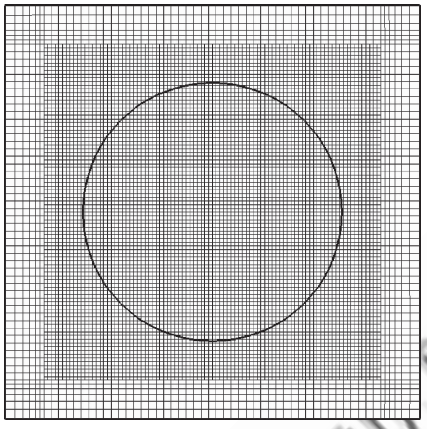


图 13 局部网格加密

Fig. 13 Local refining for computation mesh

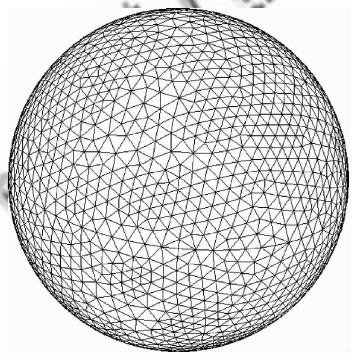


图 14 圆球表面的 Lagrange 网格单元

Fig. 14 Lagrange mesh of sphere surface

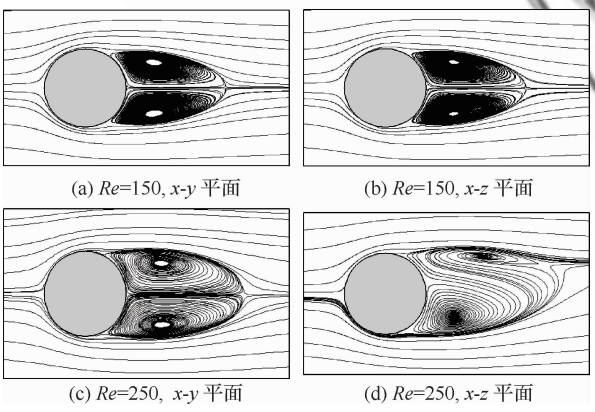


图 15 不同雷诺数圆球绕流流线

Fig. 15 Streamlines for flow past sphere at different Re

本文计算得到圆球的受力与文献对比如表 4 所示。可以看出，本文计算结果与文献结果符合较好，在 $Re=250$ 时，圆球产生了侧力（表中用 C_c 表示）。表明本文改进的反馈力浸入边界方法适合三维物体的计算。

表 4 圆球气动特性对比

Table 4 Comparison of aerodynamic coefficients over a sphere

雷诺数	方法	C_D	C_c
150	文献[32]	0.90	
	文献[33]	0.91	
	本文结果	0.90	
250	文献[32]	0.70	0.061
	文献[34]	0.722	
	本文结果	0.717	0.061

3 结 论

本文对 Goldstein 的反馈力浸入边界法进行了研究和改进，将原始方法中含有的对速度误差的时间积分转化为迭代过程中速度误差的求和，利用多个定常与非定常算例验证了改进方法的有效性。得到的主要结论有：

1）可直接基于迭代次数对反馈力源项进行计算。与原始方法相比，由于不含时间相关参数，改进的反馈力浸入边界法可与求解定常 N-S 方程的松弛迭代方法结合，用于定常流动计算。

2）隐式时间推进可以避免反馈力浸入边界法显式求解时严格的时间步长限制。本文改进的反馈力浸入边界法适合于隐式时间推进，可实现对非定常 N-S 方程的求解，且收敛特性要优于原始方法。

3）改进的方法与原始方法均是基于速度误差反馈的思想求解力源项，但本文改进的反馈力浸入边界法有更广泛的适用性。

参 考 文 献

[1] NOACK R W, BOGER D A, KUNZ R F, et al. Suggar++: An improved general overset grid assembly capability[C]// 19th AIAA Computational Fluid Dynamics. Reston: AIAA, 2009.

[2] PESKIN C S. Numerical analysis of blood flow in the heart[J]. Journal of Computational Physics, 1977, 25

(3): 220-252.

[3] MITTAL R, IACCARINO G. Immersed boundary methods[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2005, 37: 239-261.

[4] SOTIROPOULO F, YANG X L. Immersed boundary methods for simulating fluid-structure interaction[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2014, 65: 1-21.

[5] KIM W, CHOI H. Immersed boundary methods for fluid-structure interaction: A review[J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2019, 75(1): 301-309.

[6] GOLDSTEIN D, HANDER R, SIROVICH L. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field[J]. Journal of Computational Physics, 1993, 105(2): 354-366.

[7] SAIKI E M, BIRINGEN S. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: Application of a virtual boundary method[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 123(2): 450-465.

[8] 李秋实, 徐飞, 李志平. 一种包含运动边界的高精度流场数值计算方法[J]. 航空学报, 2014, 35(7): 1815-1824.
LI Q S, XU F, LI Z P. A numerical method for simulating flow involving moving boundaries with high order accuracy[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2014, 35(7): 1815-1824 (in Chinese).

[9] WANG Z, DU L, ZHAO J S, et al. Structural response and energy extraction of a fully passive flapping foil[J]. Journal of Fluids and Structures, 2017, 72: 96-113.

[10] LI X J, ZHAO R G, ZHONG C W. Novel immersed boundary-lattice Boltzmann method based on feedback law [J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012, 29(2): 179-186.

[11] HUANG W X, SHIN S J, SUNG H J. Simulation of flexible filaments in a uniform flow by the immersed boundary method[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 226(2): 2206-2228.

[12] SHOELE K, ZHU Q. Leading edge strengthening and the propulsion performance of flexible ray fins[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2012, 693: 402-432.

[13] GONG C L, HAN J K, YUAN Z J, et al. Numerical investigation of the effects of different parameters on the thrust performance of three dimensional flapping wings [J]. Aerospace Science and Technology, 2018, 84: 431-445.

[14] XU S, WANG Z J. An immersed interface method for simulating the interaction of a fluid with moving boundaries[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 216(2): 454-493.

[15] HAN J K, ZHANG Y, CHEN G. Effects of individual horizontal distance on the three-dimensional bionic flapping multi-wings in different schooling configurations[J]. Physics of Fluids, 2019, 31(4): 1903-1919.

[16] 胡国暾, 杜林, 孙晓峰. 基于浸入式边界法的叶栅颤振数值模拟[J]. 航空学报, 2015, 36(7): 2269-2278.
HU G D, DU L, SUN X F. Numerical simulation of an oscillating cascade based on immersed boundary method [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(7): 2269-2278 (in Chinese).

[17] ZHONG G H, DU L, SUN X F. Numerical investigation of an oscillating airfoil using immersed boundary method [J]. Journal of Thermal Science, 2011, 20(5): 413-422.

[18] DU L, SUN X F, VIGOR Y. Generation of vortex lift through reduction of rotor/stator gap in turbo machinery [J]. Journal of Propulsion and Power, 2015, 32(2): 1-14.

[19] WANG L, CURRAO G, HAN F, et al. An immersed boundary method for fluid-structure interaction with compressible multiphase flows[J]. Journal of Computational Physics, 2017, 346: 131-151.

[20] GUO X X, YAO J K, ZHONG C W, et al. A hybrid adaptive-gridding immersed-boundary lattice Boltzmann method for viscous flow simulations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 267(9): 529-553.

[21] YANG X L, ZHANG X, LI Z L, et al. A smoothing technique for discrete delta functions with application to immersed boundary method in moving boundary simulations[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(20): 7821-7836.

[22] LEE C. Stability characteristics of the virtual boundary method in three-dimensional applications[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 184(2): 559-591.

[23] SHIN S J, HUANG W X, SUNG H J. Assessment of regularized delta functions and feedback forcing schemes for an immersed boundary method[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2008, 58(3): 263-286.

[24] ANSYS FLUENT. Release 14. 0, theory guide[M]. Ansys Inc, 2011.

[25] 袁瑞峰. 气体动理论格式的浸入边界法研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2015.
YUAN R F. The immersed-boundary method for gas-kinetic scheme [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2015 (in Chinese).

[26] HAMA R, MELDI M, FAVIER J, et al. A pressure-corrected immersed boundary method for the numerical simulation of compressible flows[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 374: 361-383.

[27] WANG S Z, ZHANG X. An immersed boundary method based on discrete stream function formulation for two- and three-dimensional incompressible flows [J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(9): 3479-3499.

[28] WU J, SHU C. Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 228(6): 1963-1979.

[29] LEE D S, HA M Y, KIM S J, et al. Application of immersed boundary method for flow over stationary and oscillating cylinders[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2006, 20(6): 849-863.

[30] DÜTSCH H, DURST F, BECKER S, et al. Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1998, 360: 249-271.

[31] WANG Z J. Computation of insect hovering[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2001, 24: 1515-1521.

[32] JOHNSON T A, PATEL V C. Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1999, 378: 19-70.

[33] WANG Y, SHU C, YANG L M, et al. An immersed boundary-lattice Boltzmann flux solver in a moving frame to study three-dimensional freely falling rigid bodies[J]. Journal of Fluids and Structures, 2017, 68: 444-465.

[34] WANG Y, SHU C, TEO C J, et al. An efficient immersed boundary-lattice Boltzmann flux solver for simulation of 3D incompressible flows with complex geometry[J]. Computers & Fluids, 2016, 124: 54-66.

(责任编辑：李明敏)

Feedback forcing immersed boundary method for iterative calculations

LI Xu, ZHOU Zhou*, XUE Chen

School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

Abstract: This paper proposes a novel idea of Goldstein's virtual boundary method which improves the calculation of the feedback forcing term and extends the applicability of this immersed boundary method. The original virtual boundary method includes the time integration of velocity deviation, therefore confining this method to time-dependent Navier-Stokes (N-S) equations with a severe limitation of time steps for the explicit scheme. In contrast, this paper calculates the feedback forcing by the sum of velocity deviation in iteration to avoid time dependent parameters. Thus, the improved method is not only suitable for the unsteady implicit scheme, but can couple with the steady solver without any time-dependent terms. To verify this improved method, this paper simulated the flow past a stationary cylinder, the inline oscillation of a cylinder in a fluid at rest, a flapping ellipse wing and a stationary sphere. All results agree well with previous numerical results, verifying the accuracy of the present method. We come to the conclusions that the feedback force is dependent on the velocity deviation during iteration, and that the present method can couple with the implicit algorithm for unsteady flows as well as the steady Navier-Stokes solver, indicating wider applicability of the present method for extensive flow problems.

Keywords: immersed boundary method; feedback forcing term; implicit scheme; orthogonal grid; moving boundary

Received: 2019-12-06; **Revised**: 2020-04-07; **Accepted**: 2020-05-15; **Published online**: 2020-05-29 14:24
URL: http://hkxb.buaa.edu.cn/CN/html/20200903.html
Foundation items: Equipment Pre-research Program (41411020401, 41411010403); Taicang Innovation Leading Project (TC2018DYDS24)
* **Corresponding author.** E-mail: zhouzhou@nwpu.edu.cn