航 空 学 报
Acta Aeronautica et Astronautica Sinica

Jun. 25 2020 Vol. 41 No. S1
ISSN 1000-6893 CN 11-1929/V

http://hkxb.buaa.edu.cn hkxb@buaa.edu.cn

引用格式：董晓飞，任章，池庆玺，等. 有向拓扑条件下针对机动目标的分布式协同制导律设计[J]. 航空学报，2020，41(S1)：723762. DONG X F，REN Z，CHI Q X，et al. Distributed cooperative guidance for maneuvering targets with directed communication topologies[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica，2020，41(S1)：723762 (in Chinese). doi：10.7527/S1000-6893.2019.23762

有向拓扑条件下针对机动目标的分布式协同制导律设计

董晓飞[1,2,3*]，任章[1,3,4]，池庆玺[2]，李清东[1,3]

1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院，北京 100083
2. 复杂系统控制与智能协同技术重点实验室，北京 100074
3. 北京航空航天大学 飞行器控制一体化技术国防科技重点实验室，北京 100083
4. 北京航空航天大学 大数据科学与脑机智能高精尖创新中心，北京 100083

摘 要：研究了在有向拓扑条件下针对机动目标的分布式协同制导律的设计问题。首先，根据飞行器与目标之间追击过程的几何关系建立制导过程系统模型，针对该模型的非线性问题采用动态反馈线性化方法进行处理。将目标未知机动视为干扰，通过扩张状态观测器进行观测，同时将该估计值用于制导律的设计中，通过直接补偿的方式剔除目标机动对飞行器剩余飞行时间的影响。然后，将所设计的制导律代入到制导模型中，利用一致性分析方法将多飞行器协同制导问题转化为一致性问题，利用极点分析的方法对非一致性子空间的收敛性进行分析，得到协同制导律收敛的充要条件。最后，通过仿真分析的方式对所设计的协同制导律以及制导律的参数选取方法进行分析。

关键词：机动目标；分布式协同制导；扩张状态观测器；一致性；反馈线性化

中图分类号：V448.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-6893(2020)S1-723762-09

近年来多飞行器协同制导吸引了越来越多的关注，多个飞行器通过空间以及时间上的相互配合能够实现更高的作战效率，同时实现更高的性价比。针对具有良好防御能力的重点目标来说，多飞行器饱和攻击是对其实施有效攻击的最有效的方式之一。

实现多飞行器同时攻击的主要方式有 2 种。第一种为个体命中时间控制[1-7]，该方法通过对每枚导弹的命中时间进行预设来实现多飞行器同时命中目标的效果。由于飞行器在飞行过程中会收到外界干扰因素影响，并且在飞行过程中容易对航迹进行调整，因此如何设定合理的命中时间具有一定的难度。同时该方法对多飞行器命中时间偏差的控制属于开环控制，受外界干扰以及飞行器自身状态变化影响较大，控制鲁棒性较差。第二种为协同制导，该方法不需要预先设定固定的命中时间，飞行器在飞向目标的过程中通过相互通讯对飞行器的飞行状态进行调整来保证命中时间的同步。

协同制导分为集中式协同制导[8-13]和分布式协同制导。集中式协同制导需要对全局信息进行实时更新，而分布式协同制导不需要全局信息，因此在实际应用中分布式协同制导更容易实现，同时其鲁棒性更强。

收稿日期：2019-12-13；**退修日期**：2019-12-27；**录用日期**：2020-01-01；**网络出版时间**：2020-01-19 11:05
网络出版地址：http://hkxb.buaa.edu.cn/CN/html/2020S112.html
基金项目：国家自然科学基金(61922008,61973013,61873011,61803014)；航空科学基金(20170151001)；国防创新特区项目(18-163-00-TS-001-001-34)；北京市自然科学基金(4182035)
* **通信作者**. E-mail：dxf891112@126.com

孙雪娇等[14]基于分布式通讯及网络同步原理，在增广比例导引的基础上设计了一种分布式协同制导律。在此基础上周锐等[15]通过将目标视为"领弹"，采用"领-从"模式设计了一种分布式时间协同制导律，实现多飞行器同时收敛到目标位置。Wang等[16]提出了一种两段式制导策略，第1步基于二阶一致性的分布式协同制导律实现剩余飞行时间的一致，第2步采用比例导引的方式实现对目标的同时攻击。Zhao等[17-18]基于最优控制及非线性模型预测控制理论，提出了一种仅在特定时间进行制导指令更新的协同制导律。Zhao等[19]提出了两阶段的协同制导律，第1阶段首先对非线性追踪方程进行反馈线性化处理，再此基础上基于二阶一致性设计时间协同制导律。第2阶段利用比例导引针对固定目标不改变剩余飞行时间变化率的特性保持多飞行器剩余飞行时间的一致。

协同制导工作主要集中在针对固定目标的协同制导，针对机动目标的协同制导研究相对较少。文献[20-27]研究了针对机动目标的协同制导问题，但文献[20]需要假设追踪方程能够满足小扰动线性化条件；文献[20-25]需要假设能够获得目标加速度的直接量测信息，这通常难以在工程实践中实现；文献[26]虽然研究了机动目标的协同制导问题，但是其采用的方法是集中式的。文献[27]中采用的方法需要通讯拓扑是无向的，这通常会导致更多的通讯量以及能量消耗。

本文提出了一种适用于机动目标的分布式协同制导律。包括分布式扩张状态观测器以及协同制导律2部分。分布式扩张状态观测器用于同时观测追踪方程的系统状态以及干扰，协同制导律将非线性追踪方程线性化为二阶线性系统，通过一致性分析以及干扰补偿的方式实现飞行器对目标的同时攻击。

本文的创新之处主要有以下3点：

1）本文所提出的协同制导律能够应用于机动目标，而文献[1-19]中的方法仅能应用于固定目标。由于目标随机机动带来的问题使得用于固定目标的协同制导律设计会变得更加复杂，同时机动目标相对于固定目标来说适用范围更加广泛。

2）文献[20-27]研究了针对机动目标的协同制导问题，但是文献[20-25]中需要目标加速度信息的测量值，这在工程中通常难以直接获得。本文的协同制导律设计中没有用到目标的加速度信息。通过分布式扩张状态观测器同时对追踪方程的状态以及由目标加速度带来的干扰进行估计，同时通过极点分析的方式给出了协同制导律收敛的充分必要条件。

3）虽然文献[26-27]没有用到目标加速度信息，但在通讯拓扑方面，文献[26]中的方法是集中式的，文献[27]中需要的通讯拓扑是无向的，而本文中的通讯拓扑是无向的并且仅需要满足拓扑中有生成树的条件。另外文献[27]需要飞行器具备轴向速度调整能力，而本文则不需要。

1 预备知识及问题描述

1.1 代数图论相关知识

假设有N个飞行器参与了一次协同攻击，多飞行器之间的信息交互关系可以用有向图来描述。每一个导弹都可以被看作有向图中的一个节点。

假设$G=\{M,E,\boldsymbol{W}\}$为有向图，$M=\{m_1, m_2,\cdots,m_N\}$为多导弹集合；$E\subseteq\{(m_i,m_j):m_i, m_j\in M\}$为多弹之间的边的集合，$E$中的一条边可以由$e_{ij}=(m_i,m_j)$ $(i\neq j)$来表示；$\boldsymbol{W}=[\omega_{ij}]\in\mathbf{R}$为边的权值矩阵。当且仅当有信息从$m_j$流向$m_i$时边的权值$\omega_{ij}\neq 0$。

值得注意的是存在边e_{ij}意味着m_i可以接收到m_j的信息，但是反之不一定成立。如果至少存在一个节点具有指向其他节点的有向路径则称该有向图包含生成树。

引理1[28] 假设$\boldsymbol{L}\in\mathbf{R}^{N\times N}$为有向拓扑$\boldsymbol{M}$的拉普拉斯矩阵，那么$\boldsymbol{L}$至少含有一个零特征值，$\mathbf{1}_N$为该特征值的特征向量，也就是说$\boldsymbol{L}\mathbf{1}_N=0$。

如果通讯拓扑$\boldsymbol{M}$含有生成树，那么0是拉普拉斯矩阵$\boldsymbol{L}$的单特征值，同时$\boldsymbol{L}$的其他$N-1$个特征值都有正实部。

1.2 问题描述

工程实践中，飞行器的飞行轨迹通常被分解为横向及纵向平面，本文主要关注飞行器在横向平面中的运动，考虑多飞行器协同制导问题时的标准假设：① 飞行器和目标都被视为平面上的质

点；② 与制导回路相比，飞行器导引头和自动驾驶仪的动力学速度足够快；③ 飞行器的轴向速度为常值。

制导过程的几何图形如图 1 所示。

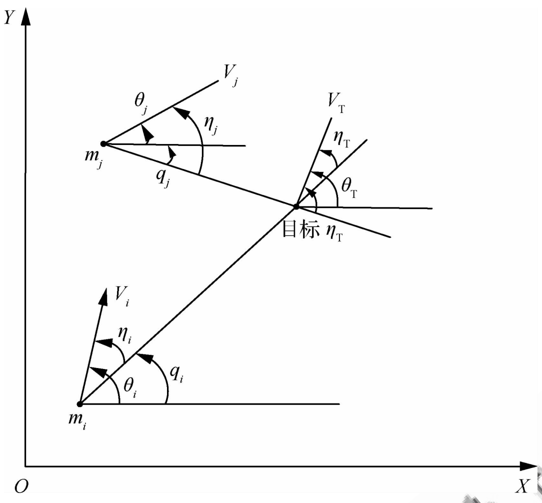

图 1　针对机动目标的协同制导过程的几何关系

Fig. 1　Geometry relationship against maneuvering target in cooperative guidance process

图 1 中：$m_i(i\in\{1,2,\cdots,N\}$ 为 i 个导弹；q_i、θ_i 和 η_i 分别为视线角、航向角以及前置角。

由图 1 中可以得到

$$\eta_i(t)=q_i(t)-\theta_i(t) \tag{1}$$

制导过程的动态方程为

$$\begin{cases}\dot{R}_i(t)=V_T\cos\eta_{\mathrm{T}i}(t)-V_i\cos\eta_i(t)\\ \dot{q}_i(t)=\dfrac{V_i}{R_i(t)}\sin\eta_i(t)-\dfrac{V_\mathrm{T}}{R_i(t)}\sin\eta_{\mathrm{T}i}(t)\\ \dot{\theta}_i(t)=n_i(t)g/V_i\end{cases} \tag{2}$$

式中：$R_i(t)$ 为从 m_i 到目标的距离；g 为重力加速度；V_T 和 $\eta_{\mathrm{T}i}(t)$ 分别为目标的速度和前置角；V_i、$\eta_i(t)$、$n_i(t)$ 为飞行器的轴向速度、前置角以及法向加速度。V_i 的方向由 $n_i(t)$ 来控制，其中 $n_i(t)$ 方向垂直于 V_i 。

令 $r_i(t)=R_i(t)/V_i$ ，由式(1)和式(2)可得

$$\begin{cases}\dot{r}_i(t)=\dfrac{V_\mathrm{T}}{V_i}\cos\eta_{\mathrm{T}i}(t)-\cos\eta_i(t)\\ \ddot{r}_i(t)=-\dfrac{V_\mathrm{T}}{V_i}\sin\eta_{\mathrm{T}i}(t)\dot{\eta}_{\mathrm{T}i}(t)+\sin\eta_i(t)\cdot\\ \qquad\left(\dfrac{\sin\eta_i(t)}{r_i(t)}-\dfrac{V_\mathrm{T}}{V_ir_i(t)}\sin\eta_{\mathrm{T}i}(t)-n_i(t)g/V_i\right)\end{cases} \tag{3}$$

如果 V_i 是固定的，那么导弹 m_i 的命中剩余时间由 $r_i(t)$ 以及 $\dot{r}_i(t)$ 所决定。因此本文的目的是设计合理的 $n_i(t)$ 使得弹群的 $r_i(t)$ 和 $\dot{r}_i(t)$ 趋于一致，这也就意味着不同飞行器与目标之间的距离将会收敛到相同值。

定义 1　对于任意 m_i,m_j ，若 $r_i(t),r_j(t)$ 以及 $\dot{r}_i(t),\dot{r}_j(t)$ 满足式(4)时多飞行器系统实现对目标的协同攻击。

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty}|r_i(t)-r_j(t)|=0\\ \lim\limits_{t\to\infty}|\dot{r}_i(t)-\dot{r}_j(t)|=0\end{cases} \tag{4}$$

通过上述分析，将针对机动目标的多飞行器协同制导问题转化为具有非线性动力学特性的多智能体系统一致性问题。本文中将重点关注以下问题：① 如何基于邻居信息设计协同制导律。② 如何设计制导律的参数多飞行器能够实现在有向通讯拓扑的条件下针对机动目标的同时攻击。

2　分布式协同制导律设计

首先设计了分布式扩张状态观测器，同时对追踪系统的状态及干扰进行估计。然后基于分布式状态观测器设计了分布式协同制导律，同时基于一致性理论及极点分析的方法得出制导律收敛的充分必要条件。

2.1　分布式扩张状态观测器设计

记

$$\begin{cases}d_i(t)=-\dfrac{V_\mathrm{T}}{V_i}\sin\eta_{\mathrm{T}i}(t)\dot{\eta}_{\mathrm{T}i}(t)-\\ \qquad\dfrac{V_\mathrm{T}\sin\eta_i(t)\sin\eta_{\mathrm{T}i}(t)}{V_ir_i(t)}\\ u_i(t)=\dfrac{V_i\sin\eta_i(t)^2}{r_i(t)}-\dfrac{\sin\eta_i(t)n_i(t)g}{V_i}\end{cases} \tag{5}$$

以及 $x_{1i}(t)=r_i(t)-r_{\mathrm{ref}}(t)$，$x_{2i}(t)=\dot{r}_i(t)-\dot{r}_{\mathrm{ref}}$，$r_{\mathrm{ref}}(t)=\int_0^t\dot{r}_{\mathrm{ref}}\mathrm{d}\tau=t\dot{r}_{\mathrm{ref}}$ 。

式(3)可以被改写为

$$\begin{cases}\dot{x}_{1i}(t)=x_{2i}(t)\\ \dot{x}_{2i}(t)=u_i(t)+d_i(t)\end{cases} \tag{6}$$

式中：$x_{1i}(t)$、$x_{2i}(t)$ 为系统(5)的状态；$u_i(t)$ 和 $d_i(t)$ 分别为系统的控制输入以及干扰。

定义 1 中的条件可以转化为

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty}|x_{1i}-x_{1j}|=0\\ \lim\limits_{t\to\infty}|x_{2i}-x_{2j}|=0\end{cases}\tag{7}$$

引理 2[29] 考虑以下高阶非线性系统：

$$\begin{cases}\dot{x}_k(t)=x_{k+1}(t),k=1,2,\cdots,n-1\\ \dot{x}_n(t)=u(t)+f(\boldsymbol{x}(t),t)\\ y(t)=x_1(t)\end{cases}\tag{8}$$

式中：$\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 为系统的状态；$u(t)\in\mathbf{R}$ 为系统控制输入；$f(\boldsymbol{x}(t),t)$ 为广义上的不确定性其中包括系统的非线性部分以及外部的干扰。

如果 $\mathrm{d}(f(\boldsymbol{x}(t),t))/\mathrm{d}t$ 是有界的，那么可以将 $x_{n+1}(t)=f(\boldsymbol{x}(t),t)$ 作为系统的扩张状态。扩张状态观测器可以表示为

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_k(t)=\hat{x}_{k+1}(t)+\beta_{0k}(x_1(t)-\hat{x}_1(t))\\ \qquad k=1,2,\cdots,n-1\\ \dot{\hat{x}}_n(t)=u(t)+\hat{x}_{n+1}(t)+\beta_{0n}(x_1(t)-\hat{x}_1(t))\\ y(t)=x_1(t)\end{cases}\tag{9}$$

式中：$\hat{\boldsymbol{x}}(t)=[\hat{x}_1(t),\hat{x}_2(t),\cdots,\hat{x}_{n+1}(t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n+1}$ 为观测器的状态，通过合理选择其中的 $\boldsymbol{\beta}=[\beta_{01},\beta_{02},\cdots,\beta_{0(n+1)}]^{\mathrm{T}}$ 等参数，那么估计值与实际值之间的误差 $x_{n+1}(t)-\hat{x}_{n+1}(t)$ 能够足够小。

根据引理 2 设计分布式扩张状态观测器，令 $\hat{x}_{1i}(t),\hat{x}_{2i}(t),\hat{x}_{3i}(t)$ 分别为 $x_{1i}(t),x_{2i}(t),d_i(t)$ 的估计值。记 $\tilde{x}_{1i}=x_{1i}-\hat{x}_{1i},\tilde{x}_{2i}=x_{2i}-\hat{x}_{2i},\tilde{x}_{3i}=x_{3i}-\hat{x}_{3i}$ 以及 $\rho_i(t)=\sum\limits_{j=1}^{n-1}a_{ij}(\tilde{x}_{1i}-\tilde{x}_{1j})$ 为估计偏差，分布式扩张状态观测器可以写为

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_{1i}(t)=\hat{x}_{2i}(t)+\beta_1\rho_i(t)\\ \dot{\hat{x}}_{2i}(t)=u_i(t)+\hat{x}_{3i}(t)+\beta_2\rho_i(t)\\ \dot{\hat{x}}_{3i}(t)=\beta_3\rho_i(t)\end{cases}\tag{10}$$

记估计误差为

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_{1i}(t)=\dot{\tilde{x}}_{2i}(t)-\beta_1\sum\limits_{j=1}^{N-1}(\dot{\tilde{x}}_{1i}(t)-\dot{\tilde{x}}_{1j}(t))\\ \dot{\tilde{x}}_{2i}(t)=\dot{\tilde{x}}_{3i}(t)-\beta_2\sum\limits_{j=1}^{N-1}(\dot{\tilde{x}}_{1i}(t)-\dot{\tilde{x}}_{1j}(t))\\ \dot{\tilde{x}}_{3i}(t)=-\beta_3\sum\limits_{j=1}^{N-1}(\dot{\tilde{x}}_{1i}(t)-\dot{\tilde{x}}_{1j}(t))\end{cases}\tag{11}$$

2.2 分布式协同制导律设计

基于分布式状态观测器设计的分布式协同制导律为

$$u_i(t)=-k_1x_{1i}(t)-k_2\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}((x_{1i}(t)-x_{1j}(t))+(\hat{x}_{2i}(t)-\hat{x}_{2j}(t)))-\hat{x}_3(t)\tag{12}$$

在协同制导律(12)的作用下，系统(6)可以改写为

$$\begin{cases}\dot{x}_{1i}=x_{2i}\\ \dot{x}_{2i}=-k_1x_{1i}(t)-k_2\sum\limits_{j=1}^{n-1}a_{ij}((x_{1i}-x_{1j})+\\ \qquad(x_{2i}-x_{2j})-(\tilde{x}_{2i}-\tilde{x}_{2j}))+\tilde{x}_{3i}\end{cases}\tag{13}$$

记

$$\xi_{1i}(t)=x_{1i}(t),\xi_{2i}(t)=x_{2i}(t),\xi_{3i}(t)=\tilde{x}_{1i}(t)$$
$$\xi_{4i}(t)=\tilde{x}_{2i}(t),\xi_{5i}(t)=\tilde{x}_{3i}(t)$$
$$\boldsymbol{\xi}_i(t)=[\xi_{1i}(t),\xi_{2i}(t),\xi_{3i}(t),\xi_{4i}(t),\xi_{5i}(t)]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\xi}(t)=[\boldsymbol{\xi}_1(t),\boldsymbol{\xi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\xi}_n(t)]^{\mathrm{T}}$$

那么式(13)可以被改写为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=\boldsymbol{I}_N\otimes\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\-k_1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}(t)-\boldsymbol{L}\otimes\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\-k_2&-k_2&0&k_2&0\\0&0&-\beta_1&0&0\\0&0&-\beta_2&0&0\\0&0&-\beta_3&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}(t)\tag{14}$$

根据定义 1 可以直接得到引理 3。

引理 3 多飞行器协同实现协同攻击当且仅当系统(14)实现状态一致。

记 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的特征值，其中特征值 $\lambda_1=0$ 对应的特征向量记为 $\bar{\boldsymbol{u}}_1=\mathbf{1}_N$，记 $0<\mathrm{Re}(\lambda_2)\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{Re}(\lambda_N)$。

令 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{J}$，其中：$\boldsymbol{U}=[\bar{\boldsymbol{u}}_1,\bar{\boldsymbol{u}}_2,\cdots,\bar{\boldsymbol{u}}_N]$，$\boldsymbol{U}^{-1}=[\tilde{\boldsymbol{u}}_1,\tilde{\boldsymbol{u}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{u}}_N]^{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{J}$ 为 $\boldsymbol{L}$ 的约旦标准型，$\bar{\boldsymbol{u}}_i\in\mathbf{C}^N,\tilde{\boldsymbol{u}}_i\in\mathbf{C}^N(i=1,2,\cdots,N)$。

令 $\boldsymbol{c}_1\in\mathbf{R}^5$，$\boldsymbol{c}_2\in\mathbf{R}^5$，$\boldsymbol{c}_3\in\mathbf{R}^5$，$\boldsymbol{c}_4\in\mathbf{R}^5$，$\boldsymbol{c}_5\in\mathbf{R}^5$ 是线性无关的向量，同时记 $\boldsymbol{p}_j=\bar{\boldsymbol{u}}_i\otimes\boldsymbol{c}_q(j=5(i-1)+q;i=1,2,\cdots,N;q=1,2,3,4,5)$，那么一致子空间可以定义为 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U})$，其由 $\boldsymbol{p}_1=\bar{\boldsymbol{u}}_1\otimes\boldsymbol{c}_1=\mathbf{1}_N\otimes\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{p}_2=\bar{\boldsymbol{u}}_1\otimes\boldsymbol{c}_2=\mathbf{1}_N\otimes\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_5=\bar{\boldsymbol{u}}_1\otimes\boldsymbol{c}_5=\mathbf{1}_N\otimes\boldsymbol{c}_5$ 扩张而成。非一致子空间可以

相应定义为 $\bar{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{U})$，其由 $\boldsymbol{p}_6,\boldsymbol{p}_7,\cdots,\boldsymbol{p}_{5N}$ 扩张而成。由于 $\boldsymbol{p}_j(j=1,2,\cdots,5N)$ 是线性无关的，那么可以得到引理 4。

引理 4　$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U})\oplus\bar{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{C}$

由于有向拓扑的拉普拉斯矩阵特征值有可能是复数因此需要引入以下 2 个引理。

引理 5[30]　考虑系统 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}(t)$，$\boldsymbol{M}$ 为 2×2 的复数矩阵，其特征方程为 $f(s)=s^2+a_1s+a_2$，该系统渐进稳定当且仅当 $\mathrm{Re}(a_1)>0$ 和 $\mathrm{Re}(a_1)\mathrm{Re}(a_1\bar{a}_2)-\mathrm{Im}(a_2)^2>0$。

引理 6[30]　考虑系统 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}(t)$，$\boldsymbol{M}$ 为 3×3 的复数矩阵，其特征方程为 $f(s)=s^3+a_1s^2+a_2s+a_3$，该系统渐进稳定当且仅当下面 3 个条件同时成立：

1) $\mathrm{Re}(a_1)>0$

2) $\mathrm{Re}(a_1)\cdot\mathrm{Re}(a_1\bar{a}_2-a_3)-(\mathrm{Im}a_2)^2>0$

3) $[\mathrm{Re}(a_1)\mathrm{Re}(a_2\bar{a}_3)-(\mathrm{Re}(a_3))^2]\cdot[\mathrm{Re}(a_1)\mathrm{Re}(a_1\bar{a}_2-a_3)-(\mathrm{Im}(a_2))^2]-[\mathrm{Re}(a_1)\mathrm{Im}(\bar{a}_1a_3)+(\mathrm{Re}(a_3)\mathrm{Im}(a_2))]^2>0$

定理 1　多飞行器实现对机动目标的协同攻击当且仅当以下条件同时成立：

对于任意 $i\in\{1,2,\cdots,N\}$

条件 1

$$k_2\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$$

$$k_2\mathrm{Re}(\lambda_i)(k_1k_2\mathrm{Re}(\lambda_i)+k_2\mathrm{Re}(\lambda_i)^2+\mathrm{Im}(\lambda_i)^2))-k_2^2\mathrm{Im}(\lambda_i)^2>0 \tag{15}$$

条件 2

$$\beta_1\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$$

$$\beta_1\mathrm{Re}(\lambda_i)(\beta_1\beta_2(\mathrm{Re}(\lambda_i)^2+\mathrm{Im}(\lambda_i)^2)-\beta_3\mathrm{Re}(\lambda_i))-\beta_2^2\mathrm{Im}(\lambda_i)^2>0$$

$$[\beta_1\beta_2\beta_3\mathrm{Re}(\lambda_i)(\mathrm{Re}(\lambda_i)^2+\mathrm{Im}(\lambda_i)^2)-\beta_3^2\mathrm{Re}(\lambda_i)^2]\cdot[\beta_1\mathrm{Re}(\lambda_i)(\beta_1\beta_2(\mathrm{Re}(\lambda_i)^2+\mathrm{Im}(\lambda_i)^2)-\beta_3\mathrm{Re}(\lambda_i))-\beta_2^2\mathrm{Im}(\lambda_i)^2]-[\beta_2\beta_3\mathrm{Re}(\lambda_i)\mathrm{Im}(\lambda_i)]^2>0 \tag{16}$$

证明　由引理 4，可以得到 $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{0,\bar{\boldsymbol{J}}\}$，其中 $\bar{\boldsymbol{J}}$ 包括特征值 $\lambda_i(i=2,3,\cdots,N)$ 对应的约旦块。

令 $\tilde{\boldsymbol{U}}=[\tilde{\boldsymbol{u}}_2,\tilde{\boldsymbol{u}}_3,\cdots,\tilde{\boldsymbol{u}}_N]^{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{\zeta}(t)=(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1^{\mathrm{H}}\otimes\boldsymbol{I}_5)\boldsymbol{\xi}(t)$ 并且 $\boldsymbol{\varsigma}(t)=(\tilde{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{I}_5)\boldsymbol{\xi}(t)$，那么系统(14)可以写为

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\-k_1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{\zeta}(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varsigma}}(t)=\left\{\boldsymbol{I}_{n-1}\otimes\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\-k_1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\boldsymbol{J}\otimes\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\-k_2&-k_2&0&k_2&0\\0&0&-\beta_1&0&0\\0&0&-\beta_2&0&0\\0&0&-\beta_3&0&0\end{bmatrix}\right\}\boldsymbol{\zeta}(t) \tag{17}$$

令

$$\boldsymbol{\xi}_C(t)=(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{I}_5)[\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{H}}(t),0]^{\mathrm{H}}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{\bar{C}}(t)=(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{I}_5)[0,\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{H}}(t)]^{\mathrm{H}}$$

以及 $\boldsymbol{e}_i\in\mathbf{R}^N$ 为第 i 个元素为 1 其他元素为 0 的向量。

因 $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3,\boldsymbol{c}_4,\boldsymbol{c}_5$ 为线性无关的向量，所以存在 $\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t),\alpha_4(t),\alpha_5(t)$ 以及 $\alpha_{5k+j}(t)$ $(k=1,2,\cdots,N-1;j=1,2,3,4,5)$ 使得

$$\boldsymbol{\zeta}(t)=\alpha_1(t)\boldsymbol{c}_1+\alpha_2(t)\boldsymbol{c}_2+\alpha_3(t)\boldsymbol{c}_3+\alpha_4(t)\boldsymbol{c}_4+\alpha_5(t)\boldsymbol{c}_5$$

$$\boldsymbol{\varsigma}(t)=[\alpha_6(t)\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{H}}+\alpha_7(t)\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{H}}+\alpha_8(t)\boldsymbol{c}_3^{\mathrm{H}}+\alpha_9(t)\boldsymbol{c}_4^{\mathrm{H}}+\alpha_{10}(t)\boldsymbol{c}_5^{\mathrm{H}},\cdots,\alpha_{5N-4}(t)\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{H}}+\alpha_{5N-3}(t)\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{H}}+\alpha_{5N-2}(t)\boldsymbol{c}_3^{\mathrm{H}}+\alpha_{5N-1}(t)\boldsymbol{c}_4^{\mathrm{H}}+\alpha_{5N}(t)\boldsymbol{c}_5^{\mathrm{H}}]^{\mathrm{H}}$$

由于 $[\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{H}}(t),0]^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{\zeta}(t)$，可以得到

$$\boldsymbol{\xi}_C(t)=(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{I}_5)(\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{\zeta}(t))=\bar{\boldsymbol{u}}_1\otimes\boldsymbol{\zeta}(t)=\alpha_1(t)\boldsymbol{p}_1+\alpha_2(t)\boldsymbol{p}_2+\cdots+\alpha_5(t)\boldsymbol{p}_5\in\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}) \tag{18}$$

根据 $\boldsymbol{p}_j(j=6,7,\cdots,5N)$，可以得到

$$\boldsymbol{\xi}_{\bar{C}}(t)=\sum_{i=2}^{N}(\alpha_{5i-4}(t)(\bar{\boldsymbol{u}}_i\otimes\boldsymbol{c}_1)+\alpha_{5i-3}(t)(\bar{\boldsymbol{u}}_i\otimes\boldsymbol{c}_2)+\cdots+\alpha_{5i}(t)(\bar{\boldsymbol{u}}_i\otimes\boldsymbol{c}_5))=\sum_{j=6}^{N}\alpha_j(t)\boldsymbol{p}_j\in\bar{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{U}) \tag{19}$$

由于 $[\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{H}}(t),\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{H}}(t)]^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{U}^{-1}\otimes\boldsymbol{I}_5)\boldsymbol{\xi}(t)$，可以得到 $\boldsymbol{\xi}(t)=\boldsymbol{\xi}_C(t)+\boldsymbol{\xi}_{\bar{C}}(t)$。由引理 3 和引理 4 多飞行器实现协同攻击当且仅当 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{\xi}_{\bar{C}}(t)=0$，也就是

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{\varsigma}(t)=0 \tag{20}$$

从 $\bar{\boldsymbol{J}}$ 的结构可知，方程(20)等价于以下 $N-1$ 个子系统的稳定性：

$$\dot{\varsigma}_i(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -k_1-k_2\lambda_i & -k_2\lambda_i & 0 & k_2\lambda_i & 1\\ 0 & 0 & -\beta_1\lambda_i & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\beta_2\lambda_i & 0 & 1\\ 0 & 0 & -\beta_3\lambda_i & 0 & 0\end{bmatrix}\varsigma_i(t) \tag{21}$$

该系统的特征方程为

$$f_i(s)=(s^2+k_2\lambda_i s+k_1+k_2\lambda_i)\cdot(s^3+\lambda_i\beta_1 s^2+\lambda_i\beta_2 s+\lambda_i\beta_3) \tag{22}$$

根据引理 5 和 6 可知当且仅当条件式(15)，式(16)成立时式(20)成立，即多飞行器系统实现对机动目标的协同攻击。

在定理 1 的基础上，联立式(4)和式(11)可以得到制导律的数学表达式为

$$n_i(t)=\frac{V_i\sin(\eta_i(t))}{gr_i(t)}-\frac{V_i}{g\sin(\eta_i(t))}\Big[-k_1x_{1i}(t)-k_2\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}\big((x_{1i}(t)-x_{1j}(t))+(\hat{x}_{2i}(t)-\hat{x}_{2j}(t))\big)-\hat{x}_3(t)\Big] \tag{23}$$

3 数值仿真

为验证本文所提出的针对机动目标的分布式协同制导律的有效性，以 4 个飞行器对机动目标进行协同攻击的情形为例，在通讯拓扑以及过载限幅的条件下，进行仿真分析。其通讯拓扑如图 2 所示。

该拓扑的拉普拉斯矩阵为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

其特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=2$，根据定理 1 参数选取范围为 $k_1>-k_2, k_2>0$ 且 $\beta_1>0,\beta_2>0,\beta_3>0,\beta_1\beta_2-\beta_3>0$。取 $k_1=0.1$，$k_2=0.7,\beta_1=50,\beta_2=7\ 500,\beta_3=125\ 000$ 进行仿真。初始条件如表 1 所示。

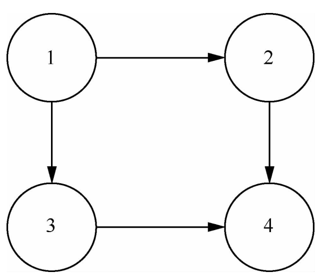

图 2 多飞行器通信拓扑关系

Fig. 2 Communication topology for multi-aircrafts

目标初始位置为(10 000，0)，速度大小为 20 m/s²，其过载为 0.1 m/s²。在飞行器距离目标大于 500 m 时采用本文中所提出的协同制导律，小于 500 m 时采用比例导引，仿真结果如图 3～图 6 所示。

图 3 为飞行过程中的飞行轨迹，图 4 为

表 1 仿真初始条件

Table 1 Initial conditions of simulation

飞行器	速度/(m·s⁻¹)	距离/m	初始弹道偏角/(°)
1	260	10 440	0
2	268	10 050	0
3	265	10 198	0
4	261	10 770	0

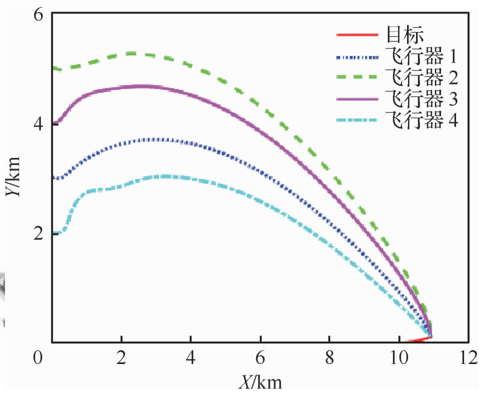

图 3 多飞行器飞行轨迹

Fig. 3 Trajectories of multi-aircrafts

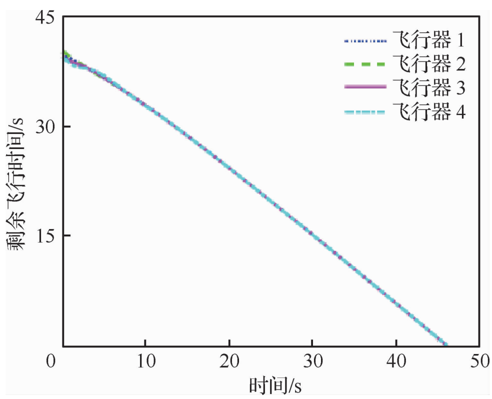

图 4 R_i/V_i 的变化曲线

Fig. 4 Curve of R_i/V_i

R_i/V_i 在飞行过程中的变化情况，图 5 为飞行器在飞行过程中的过载指令变化情况，图 6 为飞行器飞行剩余飞行时间偏差收敛的情况。

从图 4 和图 6 中可以看出在一段时间之后飞行器剩余飞行时间偏差收敛到一致的状态，同时从图 5 中可以看出在整个飞行过程中飞行器的过载被限制在 $20g$ 以内。需要指出的是图 6 中，最后命中时间出现了一定的偏差，这是由于在切换成比例导引之后命中时间不再受控制因此导致命中时间出现了一定偏差，但是该偏差量相比命中时间初始偏差小一个数量级。

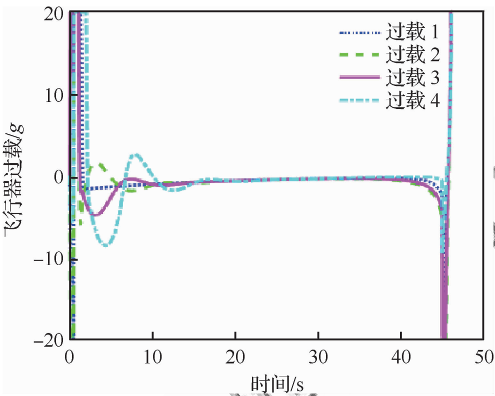

图 5　飞行器过载指令

Fig. 5　Acceleration commands of multiaircarft

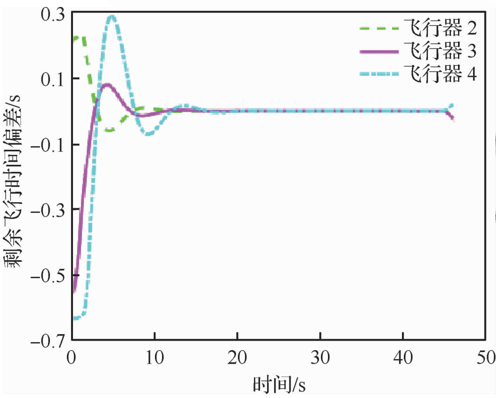

图 6　Δr 的变化曲线

Fig. 6　Curves of Δr

4　结　论

1）基于反馈线性化方法及一致性理论，提出了针对机动目标的协同制导律，并通过极点分析给出了制导律参数的选取方法。

2）所提出的协同制导律能够在有向拓扑、不需要目标加速度测量信息、不需要飞行器具备轴向机动的条件下实现对机动目标的协同攻击。

3）在制导末端存在制导指令过大的问题，目前采用切换成比例导引的方式避免该问题，但是会导致命中时间在制导末端产生一定的误差，针对该问题仍需进一步研究。

参　考　文　献

[1] JEON I S, LEE J I, TAHK M J. Impact-time-control guidance law for anti-ship missiles[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2006, 14(2): 260-266.

[2] ZHANG Y, WANG X, MA G. Impact time control guidance law with large impact angle constraint[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2015, 229(11): 2119-2131.

[3] 孙阳平，林王鹏，范作娥，等. 一种多约束条件下的最优末制导律研究[J]. 兵工自动化，2013，32(12)：4-7.
SUN Y P, LIN W P, FAN Z E, et al. Study on optimal guidance law under multiple-constrained condition [J]. Ordnance Industry Automation, 2013, 32(12): 4-7 (in Chinese).

[4] 张友根，张友安，施建洪，等. 基于双圆弧原理的协同制导律研究[J]. 海军航空工程学院学报，2009，24(5)：537-542.
ZHANG Y G, ZHANG Y A, SHI J H, et al. Research on cooperative guidance for multi-missiles based on bi-arcs [J]. Journal of Naval Aeronautical and Astronautical University, 2009, 24(5): 537-542 (in Chinese).

[5] HARL N, BALAKRISHNAN S N. Impact time and angle guidance with sliding mode control[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, 20(6): 1436-1449.

[6] KUMAR S R, GHOSE D. Sliding mode control based guidance law with impact time constraints[C]//2013 American Control Conference (ACC). Piscataway: IEEE Press, 2013: 5760-5765.

[7] KUMAR S R, GHOSE D. Impact time and angle control guidance[C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Reston: AIAA, 2015: 1-22.

[8] ZHAO E J, WANG S, CHAO T, et al. Multiple missiles cooperative guidance based on leader-follower strategy[C]//Proceedings of 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference, Piscataway: IEEE Press. 2014: 1163-1167.

[9] ZHAO E J, CHAO T, WANG S, et al. An adaptive parameter cooperative guidance law for multiple flight vehicles[C]//Proceedings of AIAA Atmospheric Flight Me-

chanics Conference. Reston: AIAA, 2015: 2709-2718.

[10] QILUN Z, XIWANG D, JIAN C, et al. Coordinated guidance strategy for heterogeneous missiles intercepting hypersonic weapon[C]∥Proceedings of the 34th Chinese Control Conference (CCC), 2015: 5170-5175.

[11] SUN X, ZHOU R, HOU D, et al. Consensus of leader-followers system of multi-missile with time-delays and switching topologies[J]. Optik-International Journal for Light and Electron Optics, 2014, 125(3): 1202-1208.

[12] JEON I S, LEE J I, TAHK M J. Homing guidance law for cooperative attack of multiple missiles[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2010, 33(1): 275-280.

[13] HARRISON G A. Hybrid Guidance law for approach angle and time-of-arrival control[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 1971, 35(4): 1104-1114.

[14] 孙雪娇，周锐，吴江，等. 攻击机动目标的多导弹分布式协同制导律[J]. 北京航空航天大学学报，2013，39(10): 1403-1407.

SUN X J, ZHOU R, WU J, et al. Distributed cooperative guidance law for multiple missiles attacking maneuver target[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2013, 39(10): 1403-1407 (in Chinese).

[15] 周锐，孙雪娇，吴江，等. 多导弹分布式协同制导与反步滑模控制方法[J]. 控制与决策，2014，29(9): 1617-1622.

ZHOU R, SUN X J, WU J, et al. Multi-missile distributed cooperative guidance integrating backstepping sliding mode control[J]. Control and Decision, 2014, 29(9): 1617-1622 (in Chinese).

[16] WANG Y, DONG S, OU L, et al. Cooperative control of multi-missile systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2014, 9(3): 441-446.

[17] ZHAO J, ZHOU S, ZHOU R. Distributed time-constrained guidance using nonlinear model predictive control [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 84(3): 1399-1416.

[18] ZHAO J, ZHOU R. Distributed three-dimensional cooperative guidance via receding horizon control[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2016, 29(4): 972-983.

[19] ZHAO Q L, DONG X W, LIANG Z X, et al. Distributed cooperative guidance for multiple missiles with fixed and switching communication topologies[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2017, 30(4): 1570-1581.

[20] NIKUSOKHAN M, NOBAHARI H. Closed-form optimal cooperative guidance law against random step maneuver[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2016, 52(1): 319-336.

[21] ZHAO J, ZHOU R, DONG Z. Three-dimensional cooperative guidance laws against stationary and maneuvering targets[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2015, 28(4): 1104-1120.

[22] ZHAO J, ZHOU R. Unified approach to cooperative guidance laws against stationary and maneuvering targets[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 81(4): 1635-1647.

[23] ZHAO Q L, DONG X W, SONG X, et al. Cooperative time-varying formation guidance for leader-following missiles to intercept a maneuvering target with switching topologies[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 95(1): 129-141.

[24] ZHOU J, LYU Y, LI Z, et al. Cooperative guidance law design for simultaneous attack with multiple missiles against a maneuvering target[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2018, 31(1): 287-301.

[25] SHAFEMAN V, SHIMA T. Cooperative optimal guidance laws for imposing a relative intercept angle[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 38(8): 1395-1408.

[26] SHAFEMAN V, SHIMA T. Cooperative differential games guidance laws for imposing a relative intercept angle [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 40(10): 2465-2480.

[27] WANG X H, TAN C P. 3-D Impact angle constrained distributed cooperative guidance for maneuvering targets without angular-rate measurements[J]. Control Engineering Practice, 2018, 78: 142-159.

[28] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 665-671.

[29] RAN M P, WANG Q, DONG C Y. Stabilization of a class of nonlinear systems with actuator saturation via active disturbance rejection control[J]. Automatica, 2016, 63: 302-310.

[30] ZAHREDDINE Z, ELSHEHAWEY E F. On the stability of a system of differential equations with complex coefficients[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 1988, 19(10): 963-972.

（责任编辑：苏磊）

Distributed cooperative guidance for maneuvering targets with directed conmunication topologies

DONG Xiaofei[1,2,3]*, REN Zhang[1,3,4], CHI Qingxi[2], LI Qingdong[1,3]

1. *School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China*
2. *Science and Technology on Complex System Control and Intelligent Agent Cooperation Laboratory, Beijing 100074, China*
3. *Science and Technology on Aircraft Control Laboratory, Beihang University, Beijing 100083, China*
4. *Beijing Advanced Innovation Center for Big Data and Brain Computing, Beihang University, Beijing 100083, China*

Abstract: This paper studies the distributed cooperative guidance for maneuvering targets with directed communication topologies. First, a guidance system model is established based on the geometric relationship between the aircraft and the target, in which the nonlinear problem is solved by feedback linearization. In this design, the unknown maneuver of the target is observed by the extended state observer, and the estimation of the unknown maneuver of the target is applied to the design of the guidance law. In this process, the influence of the target maneuvering on the time-to-go is eliminated by means of direct compensation. Then, the designed guidance law is brought into the guidance model, transforming the problem of cooperative guidance into the problem of consensus. Next, the necessary and sufficient conditions for the convergence of the designed cooperative guidance law are obtained by conducting the pole analysis. Finally, the designed cooperative guidance law and the method of the parameter selection are analyzed by adopting the simulation analysis.

Keywords: maneuvering target; distributed cooperative guidance; extended state observer; consensus; feedback linearization

Received: 2019-12-13; **Revised**: 2019-12-27; **Accepted**: 2020-01-01; **Published online**: 2020-01-19 11:05

URL: http://hkxb.buaa.edu.cn/CN/html/2020S112.html

Foundation items: National Natural Science Foundation of China (61922008, 61973013, 61873011, 61803014); Aeronautical Science Foundation of China (20170151001); Innovation Zone Project (18-163-00-TS-001-001-34); Beijing Natural Science Foundation (4182035)

* **Corresponding author.** E-mail: dxf891112@126.com