

引用格式：孙霆，董春曦. 传感器参数误差下的运动目标 TDOA/FDOA 无源定位算法[J]. 航空学报, 2020, 41(2): 323317. SUN T, DONG C X. TDOA/FDOA passive localization algorithm for moving target with sensor parameter errors[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2020, 41(2): 323317 (in Chinese). doi: 10.7527/S1000-7527.2019.23317

传感器参数误差下的运动目标 TDOA/FDOA 无源定位算法

孙霆，董春曦*

西安电子科技大学 电子工程学院，西安 710071

摘要：在运动目标无源定位系统中,许多算法的前提是精确已知传感器的位置以及速度,但实际情况下可利用的传感器的参数均会存在一些噪声扰动。针对这一问题,提出一种改进的两步加权最小二乘(TSWLS)时差(TDOA)与频差(FDOA)定位算法。该算法是一种闭式算法并且分为2步。第1步与经典的两步加权最小二乘算法相同,第2步进一步研究了额外变量与目标参数之间的关系并且建立了新的矩阵方程。随后,利用加权最小二乘技术给出了最终解。理论分析证明了在测量噪声较小时该算法能够达到克拉美罗界(CRLB)。所提算法具有计算复杂度低,实时性高的优点;另外,经过适当的维度调整,该算法同样适用于对多非相交源进行定位求解。计算机仿真进一步证明了理论分析的正确性。

关键词：无源定位；时差；频差；传感器位置误差；克拉美罗界

中图分类号：V247, TN911.7

文献标识码：A

文章编号：1000-6893(2020)02-323317-10

近年来,无源定位算法由于其本身不辐射电磁信号,具有电磁隐蔽性^[1]等优点受到了国内外学者的广泛关注,它已经被大量应用在无线传感器网络、雷达、麦克风阵列以及声呐系统^[2-9]等领域中。无源定位技术可以归纳为依靠传感器网络获取不同类型的观测量进行求解,这些观测量主要包括到达时间(Time of Arrival, TOA)、到达时间差(Time Difference of Arrival, TDOA)、到达角(Angle of Arrival, AOA)、以及上述参数的相互结合。当运动目标或者传感器与目标之间存在相对运动关系时,还可以利用到达频率差(Frequency Difference of Arrival, FDOA)观测量对目标的位置以及速度进行估计。

本文主要针对运动目标无源定位算法进行研究。由于其相关的最大似然问题存在高度的非线

性以及非凸性,因此寻找全局最优解变得十分困难。为此,国内外学者提出了大量的算法:线性化的最大似然估计(Maximum Likelihood Estimation, MLE)^[10-11]是解决定位问题十分有效的算法,但是这种算法的性能以及收敛性依赖于一个好的初始位置值,一旦该值选取较差其性能也会变差。为了克服这个问题,Ho 和 Xu 提出了著名的两步加权最小二乘(Two-Stage Weighted Least Squares, TSWLS)算法^[12], TSWLS 算法第1步引入额外变量并且建立了伪线性方程,随后给出了加权最小二乘(Weighted Least Squares, WLS)解,第2步利用额外变量与目标位置的关系建立了新的等式方程以提高定位精度。虽然 TSWLS 算法实时性较高,但是在定位精度方面还有待进一步提高;半定松弛(SeminDefinite Re-

laxation, SDR) 算法^[13-14]首先将定位问题描述为具有二次约束条件的优化问题, 随后利用合理的近似以及适当的松弛条件将其转化为了半定规划 (SemiDefine Programming, SDP) 问题, 最后利用优化工具箱给出了具有高精度的估计值。但是这个问题的计算复杂度较高, 需要在实时性以及精度两者之间进行较好的折中。文献[15]给出了一种基于定位误差修正的算法, 第1步与传统的 TSWLS 相同, 第2步对估计误差做了修正并给出了最终的定位估计值。文献[16]首先将定位问题描述为具有二次约束条件的二次规划 (Quadratically Constrained Quadratic Programming, QCQP) 问题, 随后利用 WLS 的解, 将二次约束转化为了线性约束, 即将 QCQP 问题转化为了线性约束二次规划 (Linearly Constrained Quadratic Programming, LCQP) 问题; 最后利用广义逆矩阵的性质对 LCQP 问题求解, 并且形成一种迭代算法, 这种算法具有闭式解的优点, 同时在高斯噪声模型下, 其定位性能优于现存的技术。

除上述提到的非凸性以及非线性问题, 传感器参数存在误差时也会对无源算法的性能产生较大的影响, 文献[17]详细阐述了不考虑传感器参数误差时产生的影响并且将 TSWLS 算法扩展到了存在传感器参数误差时的场景中; 随后文献[18]中的 TSWLS 在其基础上进一步提高了算法精度, 并且该算法适用非相交多源的定位解算。文献[13]中的 SDR 算法同样给出了一种考虑了传感器参数误差的情况, 但是 SDR 算法计算复杂度远高于 TSWLS 算法。而近几年, 文献[19-20]分别提出了存在传感器位置误差情况下改进的 TSWLS 算法以及多维标度 (MultiDimensional Scaling, MDS) 算法; 但是, 这些算法是基于 TDOA 观测量对目标定位解算, 并不能应用到对运动目标参数估计的场景之中。因此针对存在传感器参数误差的情况下, 研究一种运动目标无源定位的闭式算法十分有必要。

本文主要针对 TDOA/FDOA 运动目标定位场景, 在考虑了传感器存在参数误差的情况下, 提出了一种改进的两步加权最小二乘算法; 该算法分为两步, 其中第1步与文献[18]中经典的 TSWLS 算法第1步相同, 首先引入了辅助向量, 并且建立了伪线性方程, 给出了辅助向量的 WLS

解; 第2步中, 与文献[18]有所区别, 利用辅助向量中额外变量与目标参数之间的关系, 构造了新的等式方程, 并且利用 WLS 给出最终解。理论分析表明该算法在测量噪声较小时下可以实现克拉美罗下界 (Cramér-Rao Lower Bound, CRLB)^[21], 并且该算法仍然是闭式解, 计算复杂度与 TSWLS 算法相当, 远小于 SDR 算法。此外, 经过适当的维度调整, 该算法同样适用于对多非相交源的定位场景。仿真实验验证了所提算法的有效性。

1 定位场景

考虑在三维空间中使用 M 个传感器对一个运动目标的位置 $\mathbf{u}^o = [x^o, y^o, z^o]^T$ 以及速度 $\dot{\mathbf{u}}^o = [\dot{x}^o, \dot{y}^o, \dot{z}^o]^T$ 进行估计。第 i 个传感器的真实位置以及速度分别表示为 $\mathbf{s}_i^o = [x_i^o, y_i^o, z_i^o]^T$ 和 $\dot{\mathbf{s}}_i^o = [\dot{x}_i^o, \dot{y}_i^o, \dot{z}_i^o]^T$, 其中, $i = 1, 2, \dots, M$ 。然而, 只能获取得到不准确传感器的位置和速度, 这些参数可以分解为真实参数值加一些随机噪声:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_i &= \mathbf{s}_i^o + \Delta\mathbf{s}_i = [x_i, y_i, z_i]^T \\ \dot{\mathbf{s}}_i &= \dot{\mathbf{s}}_i^o + \Delta\dot{\mathbf{s}}_i = [\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i]^T\end{aligned}\quad (1)$$

式中: \mathbf{s}_i 和 $\dot{\mathbf{s}}_i$ 分别为第 i 个传感器可利用的位置以及速度; $\Delta\mathbf{s}_i$ 和 $\Delta\dot{\mathbf{s}}_i$ 为零均值高斯噪声向量。

将所有可利用的传感器位置和速度值使用向量形式表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^o &= [\mathbf{s}_1^T, \mathbf{s}_2^T, \dots, \mathbf{s}_M^T]^T = \mathbf{s}^o + \Delta\mathbf{s} \\ \dot{\mathbf{s}}^o &= [\dot{\mathbf{s}}_1^T, \dot{\mathbf{s}}_2^T, \dots, \dot{\mathbf{s}}_M^T]^T = \dot{\mathbf{s}}^o + \Delta\dot{\mathbf{s}}\end{aligned}\quad (2)$$

式中: $\mathbf{s}^o = [\mathbf{s}_1^{oT}, \mathbf{s}_2^{oT}, \dots, \mathbf{s}_M^{oT}]^T$ 且 $\dot{\mathbf{s}}^o = [\dot{\mathbf{s}}_1^{oT}, \dot{\mathbf{s}}_2^{oT}, \dots, \dot{\mathbf{s}}_M^{oT}]^T$; $\Delta\mathbf{s} = [\Delta\mathbf{s}_1^T, \Delta\mathbf{s}_2^T, \dots, \Delta\mathbf{s}_M^T]^T$ 且 $\Delta\dot{\mathbf{s}} = [\Delta\dot{\mathbf{s}}_1^T, \Delta\dot{\mathbf{s}}_2^T, \dots, \Delta\dot{\mathbf{s}}_M^T]^T$ 。

记 $\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{s}^T, \dot{\mathbf{s}}^T]^T$ 和 $\boldsymbol{\beta}^o = [\mathbf{s}^{oT}, \dot{\mathbf{s}}^{oT}]^T$, 那么总的测量噪声向量可以表示为

$$\Delta\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^o = [\Delta\mathbf{s}^T, \Delta\dot{\mathbf{s}}^T]^T \quad (3)$$

式中: 总的测量噪声向量 $\Delta\boldsymbol{\beta}$ 服从零均值高斯分布, 其协方差矩阵为 $E(\Delta\boldsymbol{\beta}^T \Delta\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{Q}_{\beta}$ 。

不失一般性地, 选取第1个传感器为参考传感器。因此由 M 个传感器可以得到 $(M-1)$ 个 TDOA 值, 乘以信号传播速度之后, 得到如下表达式:

$$r_{i1}^o = r_i^o - r_1^o \quad i = 2, 3, \dots, M \quad (4)$$

式中: r_{i1}^o 为 TDOA 乘以信号传播速度得到的距离差 (Range Difference, RD)。 r_i^o 为目标与第 i 个

传感器之间的距离,其表达式为

$$r_i^o = \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o\| \quad i = 2, 3, \dots, M \quad (5)$$

对式(4)两边关于时间求导有

$$\dot{r}_{ii}^o = \dot{r}_i^o - \dot{r}_1^o \quad i = 2, 3, \dots, M \quad (6)$$

式中: \dot{r}_{ii}^o 为距离差变化率 (Range Difference Rate, RDR), 并且可以通过 FDOA 计算得到^[12]。

\dot{r}_i^o 为距离变化率,且有

$$\dot{r}_i^o = (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o)^T (\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_i^o) / r_i^o \quad (7)$$

分别记 RD 以及 RDR 的测量向量为 \mathbf{r} 和 $\dot{\mathbf{r}}$, 那么它们可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r} = [r_{21}, r_{31}, \dots, r_{M1}]^T = \mathbf{r}^o + \Delta\mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} = [\dot{r}_{21}, \dot{r}_{31}, \dots, \dot{r}_{M1}]^T = \dot{\mathbf{r}}^o + \Delta\dot{\mathbf{r}} \end{cases} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{r}^o = [r_{21}^o, r_{31}^o, \dots, r_{M1}^o]^T$ 和 $\dot{\mathbf{r}}^o = [\dot{r}_{21}^o, \dot{r}_{31}^o, \dots, \dot{r}_{M1}^o]^T$ 为真实的 RD 和 RDR 向量; $\Delta\mathbf{r} = [\Delta r_{21}, \Delta r_{31}, \dots, \Delta r_{M1}]^T$ 以及 $\Delta\dot{\mathbf{r}} = [\Delta\dot{r}_{21}, \Delta\dot{r}_{31}, \dots, \Delta\dot{r}_{M1}]^T$ 为服从零均值高斯分布的噪声向量。

同样,记 $\boldsymbol{\alpha} = [\mathbf{r}^T, \dot{\mathbf{r}}^T]^T$ 为总的 RD 和 RDR 测量向量,那么噪声向量可以表示为

$$\Delta\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^o = [\Delta\mathbf{r}^T, \Delta\dot{\mathbf{r}}^T]^T \quad (9)$$

式中: $\boldsymbol{\alpha}^o = [\mathbf{r}^{oT}, \dot{\mathbf{r}}^{oT}]^T$ 为真实的 RD 和 RDR 向量值; $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ 服从零均值高斯分布并且与 $\Delta\beta$ 相互独立,其协方差矩阵为 $E(\Delta\boldsymbol{\alpha}^T \Delta\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Q}_\alpha$ 。

2 算 法

本节具体给出所提出算法的推导过程,由于所提出的算法第 1 步与文献[18]的第 1 步相同,因此第 1 步仅给出简单的总结;在新的第 2 步中,详细给出了推导过程。

2.1 算法第 1 步

首先将额外变量 r_1^o 在 \mathbf{s}_1 处进行一阶泰勒级数展开有

$$r_1^o = \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1^o\| \approx d_1^o + \mathbf{p}_{\mathbf{u}^o, \mathbf{s}_1}^T \Delta\mathbf{s}_1 \quad (10)$$

式 中: $d_1^o = \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1^o\|$ 且 $\mathbf{p}_{\mathbf{u}^o, \mathbf{s}_1} = (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1^o) / \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1^o\|$ 。

对式(4)移项并且两边进行平方,将 RD 测量值 r_{ii} 、可利用的传感器位置 \mathbf{s}_i 以及式(10)代入,同时仅保留线性误差项可以得到一组 TDOA 等式为

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= 2r_i^o \Delta n_{ii} + 2(\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o)^T \Delta\mathbf{s}_i - 2\eta_{ii}^T \Delta\mathbf{s}_1 = \\ &r_{ii}^2 + \|\mathbf{s}_1\|^2 - \|\mathbf{s}_i\|^2 + 2(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_1)^T \mathbf{u}^o + 2r_{ii} d_i^o \\ (i &= 2, 3, \dots, M) \end{aligned} \quad (11)$$

式中: $\eta_{ii} = \mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1 + r_{ii} \mathbf{p}_{\mathbf{u}^o, \mathbf{s}_1}$ 。

对式(11)两边关于时间求导可以得到一组 FDOA 方程为

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_i &= 2\dot{r}_{ii}^o \Delta n_{ii} + 2r_i^o \Delta \dot{n}_{ii} + 2(\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_i^o)^T \Delta\mathbf{s}_i - \\ &2\eta_{ii}^T \Delta \dot{\mathbf{s}}_1 + 2(\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o)^T \Delta \dot{\mathbf{s}}_i - 2\eta_{ii}^T \Delta \dot{\mathbf{s}}_1 = \\ &2(\dot{\mathbf{s}}_i - \dot{\mathbf{s}}_1)^T \mathbf{u}^o + 2(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_1)^T \dot{\mathbf{u}}^o + \\ &2r_{ii} d_i^o + 2r_{ii} \dot{d}_i^o + 2(\dot{r}_{ii} r_{ii} + \dot{\mathbf{s}}_i^T \mathbf{s}_1 - \dot{\mathbf{s}}_1^T \mathbf{s}_1) \\ (i &= 2, 3, \dots, M) \end{aligned} \quad (12)$$

式中: $\dot{d}_i^o = (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o)^T (\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_i^o) / \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o\|$, 并且

$$\begin{cases} \eta_{ii} = (\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_i^o + \gamma r_{ii} + \dot{r}_{ii} \mathbf{p}_{\mathbf{u}^o, \mathbf{s}_1}) \\ \gamma = (\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_i^o - \dot{d}_i^o \mathbf{p}_{\mathbf{u}^o, \mathbf{s}_1}) / d_i^o \end{cases} \quad (13)$$

定义 $\boldsymbol{\phi}_1^o = [\mathbf{u}^{oT}, d_1^o, \dot{\mathbf{u}}^{oT}, \dot{d}_1^o]^T$ 为未知的辅助向量,其中 d_1^o 和 \dot{d}_1^o 为新的额外变量。将所有的 TDOA 和 FDOA 等式用矩阵形式表示,那么可以得到

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = \mathbf{B}_1 \Delta\alpha + \mathbf{D}_1 \Delta\beta = \mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\phi}_1^o \quad (14)$$

式中: $\mathbf{h}_1 = [\mathbf{h}_t^T, \mathbf{h}_f^T]^T$ 为一个 $2(M-1)$ 维的列向量; $\mathbf{G}_1 = [\mathbf{G}_t^T, \mathbf{G}_f^T]^T$ 为一个 $2(M-1) \times 8$ 的矩阵;

$\boldsymbol{\epsilon}_1$ 为服从零均值高斯分布的等式误差向量; \mathbf{h}_t 和 \mathbf{h}_f 的每个元素分别表示为

$$\begin{cases} \mathbf{h}_t(i-1) = r_{ii}^2 - \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{h}_f(i-1) = 2(r_{ii} \dot{r}_{ii} - \dot{\mathbf{s}}_i^T \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{s}}_1^T \mathbf{s}_1) \end{cases} \quad (15)$$

同样,矩阵 \mathbf{G}_t 和 \mathbf{G}_f 的每一行元素分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_t(i-1, :) &= -2[(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_1)^T \quad r_{ii} \quad \mathbf{0}_{3 \times 1}^T \quad 0] \\ \mathbf{G}_f(i-1, :) &= -2[(\dot{\mathbf{s}}_i - \dot{\mathbf{s}}_1)^T \quad \dot{r}_{ii} \quad (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_1)^T \quad r_{ii}] \end{aligned} \quad (16)$$

另外, $\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1t} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_{1f} & \mathbf{B}_{1t} \end{bmatrix}$ 且 $\mathbf{B}_{1t} = 2\text{diag}(r_2^o, r_3^o, \dots, r_M^o)$ 以及 $\mathbf{B}_{1f} = 2\text{diag}(\dot{r}_2^o, \dot{r}_3^o, \dots, \dot{r}_M^o)$; $\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1t} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}_{1f} & \mathbf{D}_{1t} \end{bmatrix}$, 且 \mathbf{D}_{1t} 和 \mathbf{D}_{1f} 的每一行元素分别表示为

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{1t}(i-1, :) = 2[-\eta_{ii}^T, \mathbf{0}_{3(i-2) \times 1}^T, (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o)^T, \\ \mathbf{0}_{3(M-i) \times 1}^T] \\ \mathbf{D}_{1f}(i-1, :) = 2[-\eta_{ii}^T, \mathbf{0}_{3(i-2) \times 1}^T, (\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_i^o)^T, \\ \mathbf{0}_{3(M-i) \times 1}^T] \end{cases} \quad (17)$$

矩阵方程(14)的加权最小二乘解为

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_1 = (\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{h}_1 \quad (18)$$

式中: $\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}_1(1:3)$ 和 $\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\phi}_1(5:7)$ 为第 1 步得到的位置和速度估计值; $\mathbf{W}_1 = (\mathbf{B}_1 \mathbf{Q}_\alpha \mathbf{B}_1^T +$

$D_1 Q_\beta D_1^\top$ 为加权矩阵。另外,令 $d_1 = \phi_1(4)$ 且 $\dot{d}_1 = \phi_1(8)$ 分别为 d_1^o 和 \dot{d}_1^o 的估计值。

记 $\Delta\phi_1 = [\Delta\mathbf{u}^\top, \Delta d_1, \Delta\dot{\mathbf{u}}^\top, \Delta\dot{d}_1]^\top = \hat{\phi}_1 - \phi_1^o$ 为估计误差,则利用式(18)估计误差可以表示为

$$\Delta\phi_1 = (\mathbf{G}_1^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{G}_1^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (19)$$

由于式(19)中 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 均值为 0,因此第 1 步的估计值在测量噪声较小时近似为无偏估计;经过简单的矩阵运算,式(18)估计值的协方差矩阵近似为 $\text{cov } \hat{\phi}_1 = (\mathbf{G}_1^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{G}_1)^{-1}$ 。

2.2 算法第 2 步

第 1 步中引入的辅助向量是假设目标参数与额外变量 d_1^o 以及 \dot{d}_1^o 之间相互独立,但是实际上,它们之间存在非线性关系为

$$\begin{cases} d_1^{o2} = (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1)^\top (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1) \\ \dot{d}_1^o d_1^{o2} = (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1)^\top (\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_1) \end{cases} \quad (20)$$

文献[18]的第 2 步同样考虑了这种非线性关系,并且建立了等式方程,而本文第 2 步建立了一个不同于文献[18]的等式方程;另外,文献[18]中的 TSWLS 第 2 步得到结果之后还需要进行一些其他操作(如平方根运算等)才能得到最终结果,相比之下,算法第 2 步更简洁明了,可以直接得到最终的 WLS 估计结果;第 2 步的具体过程如下。

根据第 1 步的估计误差 $\Delta\phi_1$,真实向量值 ϕ_1^o 中的各个元素可以表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^o = \mathbf{u} - \Delta\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}^o = \dot{\mathbf{u}} - \Delta\dot{\mathbf{u}} \\ d_1^o = d_1 - \Delta d_1, \dot{d}_1^o = \dot{d}_1 - \Delta\dot{d}_1 \end{cases} \quad (21)$$

将式(21)代入式(20),并且只保留线性误差项,则有如下等式:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^\top \Delta\mathbf{u} - d_1 \Delta d_1) &= 0.5(\mathbf{u}^\top \mathbf{u} + \mathbf{s}_1^\top \mathbf{s}_1 - d_1^{o2}) - \\ \mathbf{s}_1^\top \mathbf{u}^o (\dot{\mathbf{u}}^\top \Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}^\top \Delta\dot{\mathbf{u}} - \dot{d}_1 \Delta d_1 - d_1 \Delta\dot{d}_1) &= \\ (\dot{\mathbf{u}}^\top \mathbf{u} + \mathbf{s}_1^\top \mathbf{s}_1 - \dot{d}_1 d_1) - \dot{\mathbf{s}}_1^\top \mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1^\top \dot{\mathbf{u}}^o & \end{aligned} \quad (22)$$

另外,第 1 步得到的位置和速度估计误差可以进一步改写为

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^o, \Delta\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^o \quad (23)$$

联合式(22)和式(23),将它们用矩阵形式表示可以建立新的矩阵方程为

$$\mathbf{B}_2 \Delta\phi_1 = \mathbf{h}_2 - \mathbf{G}_2 \phi_2^o \quad (24)$$

式中: $\phi_2^o = [\mathbf{u}^{o\top}, \dot{\mathbf{u}}^{o\top}]^\top$ 为第 2 步中待求的位置和速度值;并且

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ 0.5(\dot{\mathbf{u}}^\top \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{s}_1^\top \mathbf{s}_1 - \dot{d}_1^{o2}) \\ \dot{\mathbf{u}} \\ (\dot{\mathbf{u}}^\top \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{s}_1^\top \mathbf{s}_1 - \dot{d}_1 \hat{d}_1) \end{bmatrix}, \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{s}_1^\top & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \dot{\mathbf{s}}_1^\top & \mathbf{s}_1^\top \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{O} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{u}^\top & -d_1 & \mathbf{0}_{3 \times 1}^\top & 0 \\ \mathbf{O} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{I} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \dot{\mathbf{u}}^\top & -\dot{d}_1 & \mathbf{u}^\top & -d_1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (25)$$

式(24)的 WLS 解为

$$\hat{\phi}_2 = (\mathbf{G}_2^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{G}_2^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{h}_2 \quad (26)$$

式中,加权矩阵 $\mathbf{W}_2 = (\mathbf{B}_2 \text{cov}(\hat{\phi}_1) \mathbf{B}_2^\top)^{-1}$ 。

记 $\Delta\phi_2 = \hat{\phi}_2 - \phi_2^o$ 为第 2 步的估计误差,将式(26)以及 $\phi_2^o = (\mathbf{G}_2^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{G}_2^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2 \phi_2^o$ 代入估计误差中, $\Delta\phi_2$ 的可以表示为

$$\Delta\hat{\phi}_2 = (\mathbf{G}_2^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{G}_2^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{B}_2 \Delta\phi_1 \quad (27)$$

同样,由于 $E(\Delta\phi_1) = 0$,因此当测量噪声较小时第 2 步的估计近似为无偏估计,其协方差矩阵近似为

$$\text{cov } \hat{\phi}_2 = (\mathbf{G}_2^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1} \quad (28)$$

至此,本文算法通过式(26)给出了最终的目标位置和速度估计值分别为 $\dot{\mathbf{u}} = \hat{\phi}_2(1:3)$, $\dot{\mathbf{u}} = \hat{\phi}_2(4:6)$ 。

此外,还需要注意:

1) 加权矩阵 \mathbf{W}_1 和 \mathbf{W}_2 的获取均需要真实位置和速度,我们首先对加权矩阵近似为 $\mathbf{W}_1 = \mathbf{Q}_a^{-1}$,并利用式(18)得到初始的参数估计值;随后利用获得的参数值更新加权矩阵 \mathbf{W}_1 和 \mathbf{W}_2 ,得到一个更精确的估计值。仿真实验表明了这种加权矩阵的近似带来的性能损失是可以忽略不计的。

2) 若使用该算法对多非相交源的参数进行估计时,只需要对相应的矩阵进行维度调整,对此本文不在赘述,仅给出大致思路:其中,第 1 步与文献[18]算法的第 1 步相同;第 2 步中 ϕ_2^o 扩展为全部目标的位置和速度向量,每个目标均能构造出矩阵 \mathbf{G}_2 以及 \mathbf{B}_2 ,将这些矩阵联合为块对角矩阵即可建立新的矩阵 \mathbf{G}_2 和矩阵 \mathbf{B}_2 ,进而类似的矩阵方程也随之建立;最后同样利用加权最小二乘方法给出估计解。

3 性能分析

本节将对所提出算法的性能进行分析,给出

本文定位场景下的 CRLB，并且理论推导证明在测量噪声较小时，所提算法可以达到 CRLB。

上面已经提到过，本文算法给出的目标位置以及速度估计在测量噪声较小时是无偏的，因此只需要证明协方差矩阵 $\text{cov } \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2$ 可以到达 CRLB 即可。将第 1 步估计值的协方差矩阵 $\text{cov } \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1$ 代入 $\text{cov } \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2$ 的表达式中有

$$(\text{cov } \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2)^{-1} = \mathbf{G}_3^T \mathbf{Q}_a^{-1} \mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_3^T \mathbf{Q}_a^{-1} \mathbf{G}_4 (\mathbf{Q}_\beta^{-1} + \mathbf{G}_4^T \mathbf{Q}_a^{-1} \mathbf{G}_4)^{-1} \mathbf{G}_4^T \mathbf{Q}_a^{-1} \mathbf{G}_3 \quad (29)$$

式中： $\mathbf{G}_3 = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{G}_1 \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{G}_2$ ， $\mathbf{G}_4 = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{D}_1$ 。

根据文献[17]，CRLB($\boldsymbol{\varphi}_2^o$) 的表达式为

$$\text{CRLB}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}_2^o) = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Y}^T \quad (30)$$

式中：

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\varphi}_2^o} \right)^T \mathbf{Q}_a^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\varphi}_2^o} \\ \mathbf{Y} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\varphi}_2^o} \right)^T \mathbf{Q}_a^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\beta}^o} \\ \mathbf{Z} = \mathbf{Q}_\beta^{-1} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\beta}^o} \right)^T \mathbf{Q}_a^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\beta}^o} \end{array} \right. \quad (31)$$

附录 A 中给出了 $\partial \boldsymbol{\alpha}^o / \partial \boldsymbol{\varphi}_2^o$ 和 $\partial \boldsymbol{\alpha}^o / \partial \boldsymbol{\beta}^o$ 具体的表达式，同时证明了 $\mathbf{G}_3 = \partial \boldsymbol{\alpha}^o / \partial \boldsymbol{\varphi}_2^o$ 和 $\mathbf{G}_4 = -\partial \boldsymbol{\alpha}^o / \partial \boldsymbol{\beta}^o$ 在噪声水平较小时成立。显然，式(29)和式(30)具有相同的矩阵形式，因此利用附录的结果可以得到

$$\text{cov } \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2 = \text{CRLB}(\boldsymbol{\varphi}_2^o) \quad (32)$$

即本文提出的算法在测量噪声较小时能够实现 CRLB。

4 仿真实验

本节给出了仿真实验进一步验证本文所提出算法的定位性能。假设 TDOA 与 FDOA 测量误差之间相互独立，RD 及 RDD 测量误差协方差矩阵设置为 $\mathbf{Q}_a = \sigma^2 \text{blkdiag}(\mathbf{R}, 0.01\mathbf{R})$ ，这里，测量噪声的方差设置为 $\sigma^2 = 10^{-4}$ ， \mathbf{R} 为对角线元素均为 1，其他元素为 0.5 的矩阵。与文献[13, 17]相同，仿真实验选取了 6 个传感器，所有传感器位置和速度的真实值在表 1 中给出。可利用的传感器位置和速度值由真实值添加高斯噪声得到，噪声协方差矩阵的设置与文献[13]相同，为 $\mathbf{Q}_\beta = \sigma_s^2 \text{blkdiag}(\mathbf{J}, 0.5\mathbf{J})$ ，其中 σ_s^2 为噪声功率且 $\mathbf{J} = [1, 1, 1, 2, 2, 2, 10, 10, 10, 40, 40, 40, 20, 20, 20, 3, 3, 3]$ 。通过进行多次蒙特卡罗实验获取目标位

置和速度估计的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)和偏差(Bias)来评估算法的性能，蒙特卡罗仿真次数设置为 $l=10000$ 次，均方根误差以及偏差的指标定义为

$$\text{RMSE}(\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^l \|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^i - \boldsymbol{\varphi}_2^o\|^2 / l} \quad (33)$$

$$\text{bias}(\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2) = \sum_{i=1}^l \|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^i - \boldsymbol{\varphi}_2^o\| / l$$

式中： $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^i$ 为第 i 次蒙特卡罗实验得到的目标参数估计值。仿真实验考虑了 3 种不同情形下的定位场景，场景 1 和 2 分别为不同算法对近场以及远场目标参数的估计性能，对比算法选取了没有考虑传感器误差的基于定位误差修正的算法^[15]和 ICWLS 算法^[16]，以及考虑了传感器误差的 TSWLS 算法^[17]和 SDR 算法^[13]。场景 3 中将本文算法延伸到了对多个目标的定位场景中，对比算法为文献[18]中的 TSWLS 算法。另外，在场景 3 中，估计参数的均方根误差和偏差计算方法同式(33)，唯一的区别在于场景 3 中得到的 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^i$ 是第 i 次蒙特卡罗实验得到的包含所有目标位置和速度的估计值。

表 1 场景 1 中观测站的位置与速度

Table 1 Positions and velocities of sensors

观测站 序号 i	位置/m			速度/(m·s ⁻¹)		
	x_i^o	y_i^o	z_i^o	\dot{x}_i^o	\dot{y}_i^o	\dot{z}_i^o
1	300	100	150	30	-20	20
2	400	150	100	-30	10	20
3	300	500	200	10	-20	10
4	350	200	100	10	20	30
5	-100	-100	-100	-20	10	10
6	200	-300	-200	20	-10	10

图 1 和图 2 给出的是不同算法对近场目标位置以及速度估计性能的比较，目标位置和速度分别选取为 $\boldsymbol{u}^o = [305, 500, 165]^T$ m 和 $\dot{\boldsymbol{u}}^o = [-20, 15, 40]^T$ m/s。由图 1 可知，不管是位置估计还是速度估计的均方根误差，没有考虑传感器噪声的 ICWLS 算法以及基于定位误差修正的算法即使在测量噪声较小时也不能实现 CRLB，这主要是因为这些算法所忽略的传感器位置误差在估计性能中占了主导地位。当噪声较小时，本文提出的算法和对比算法^[13, 17]都可以到达 CRLB，这也证明了第 3 节理论分析的正确性。而文献[17]算法

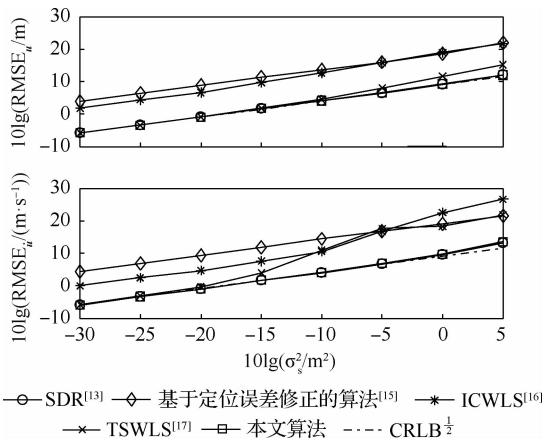


图 1 近场目标参数估计均方根误差对比

Fig. 1 Comparison of parameters estimation of RMSE for near-field source

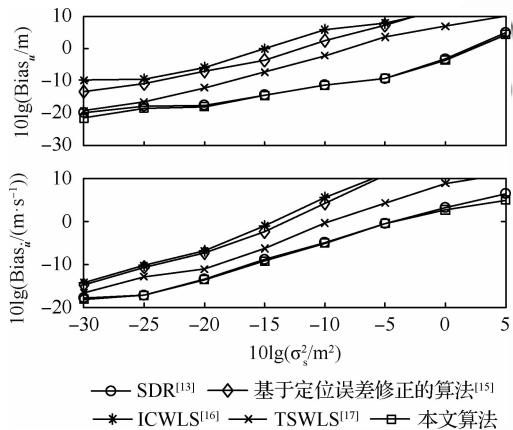


图 2 近场目标参数估计偏差对比

Fig. 2 Comparison of parameters estimation of bias for near-field source

的位置估计均方根误差在噪声大于 -5 dB 时开始逐渐偏离 CRLB; 它的速度估计均方根误差则在大于 -15 dB 开始下降, 而且出现了阈值效应; 这一点, 也是传统 TSWLS 算法的缺点, 即当参考传感器位置的某一维坐标与目标的位置坐标比较接近时, 该算法会有较差的定位性能, 这一点在文献[15]中也曾提及。而即使在测量噪声较大时, 本文提出的算法和 SDR 算法位置和速度估计的性能也十分接近 CRLB, 与 TSWLS 相比, 显然这两种算法在测量噪声较大时, 具有更强的适应能力。

如图 2 所示, 对于近场目标估计偏差性能而言, 没有考虑传感器误差的算法^[15-16]具有较大的位置和速度估计偏差。当测量噪声较小时,

TSWLS 算法能够提供和 SDR 算法以及本文提出算法比较接近的估计偏差, 但是当噪声继续增大时, TSWLS 的偏差性能开始下降。当测量噪声达到 5 dB 时, TSWLS 算法的目标位置估计偏差比本文提出的算法大约高出了 6 dB , 同样, 目标速度估计偏差比本文提出的算法大约高出了 6 dB 。SDR 算法与本文所提出的算法在整个噪声功率范围内对于目标参数估计的偏差比较接近, 均能够实现较小的位置与速度估计偏差, 这两种算法具有较好的定位性能。但是需要强调的是, SDR 算法求解优化问题需要大量的计算复杂度, 该算法实时性难以保证; 本文算法是一种闭式解法, 因此具有较高的实时性(见第 5 节表 2)。

图 3 和图 4 给出的是不同算法对远场目标位置以及速度估计性能的比较, 目标位置和速度选取为 $\mathbf{u}^\circ = [2000, 2500, 3000]^T \text{ m}$ 和 $\dot{\mathbf{u}}^\circ = [-20, 15, 40]^T \text{ m/s}$ 。如图 3 均方根误差所示, 对于远场目标参数估计, 没有考虑传感器误差的算法^[15-16]依旧无法给出较好的定位性能。另外, 当噪声功率小于 -20 dB 时, TSWLS 算法、SDR 算法以及本文算法均能够实现 CRLB, 但是噪声继续增大时, 3 种算法出现了不同程度的偏离 CRLB, 而本文算法偏离程度较小, 具有更好的鲁棒性。图 4 给出的是远场目标参数估计的偏差性能, 与近场目标情况类似, 在所有算法中, SDR 算法和本文算法依旧保持了最小的目标位置和速度估计偏差。但是正如前文所述, 本文所提出的算法

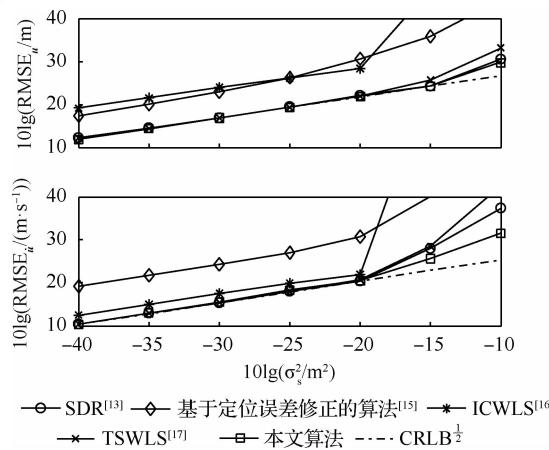


图 3 远场目标参数估计均方根误差对比

Fig. 3 Comparison of parameters estimation of RMSE for far-field source

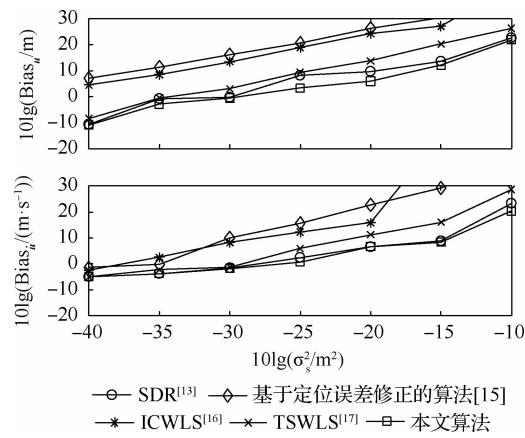


图 4 远场目标参数估计均方根误差对比

Fig. 4 Comparison of parameters estimation of bias for far-field source

与 SDR 算法相比最大的优势就是其较低的计算复杂度(见第 5 节)。

另外,本文算法还可以扩展到对非相交多目标定位解算的场景中;图 5 和图 6 给出了不同算法的估计性能。目标位置分别选取为 $\mathbf{u}_1^o = [305, 500, 165]^T$ m 和 $\mathbf{u}_2^o = [600, 650, 550]^T$ m;速度为 $\dot{\mathbf{u}}_1^o = [-20, 15, 40]^T$ m/s 和 $\dot{\mathbf{u}}_2^o = [40, -20, 15]^T$ m/s,存在噪声的传感器参数设置方法与前 2 个场景中的设置方法相同。

如图 5 所示,对于位置估计均方根误差,当噪声小于 -5 dB 时,2 种算法均能够实现 CRLB。但是当噪声继续增大时,2 种算法定位性能开始下降,当噪声为 0 dB 时,本文算法得到的均方根误差比文献[18]的 TSWLS 得到的均方根误差大

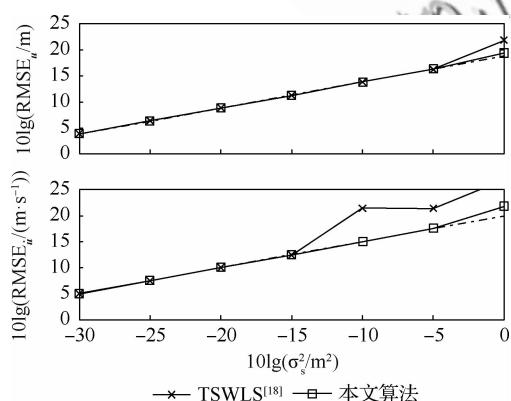


图 5 两个不相交目标参数估计均方根误差对比

Fig. 5 RMSE comparison of parameters estimation for two disjoint sources.

约降低了 4 dB。对于速度估计均方根误差,当噪声大于 -15 dB 时,文献[18] TSWLS 算法的估计性能出现了较大的下降,而本文算法在噪声大于 -5 dB 时才开始偏离 CRLB,本文算法具有更好的鲁棒性。图 6 给出了 2 种算法对于目标参数估计的偏差性能,对于位置估计偏差性能,文献[18]的算法与本文算法十分接近;但是对于速度估计偏差,本文算法显然比文献[18]的算法具有更小的偏差,当测量噪声等于 -5 dB 时,本文算法比文献[18]算法的估计偏差大约减少了 7 dB。

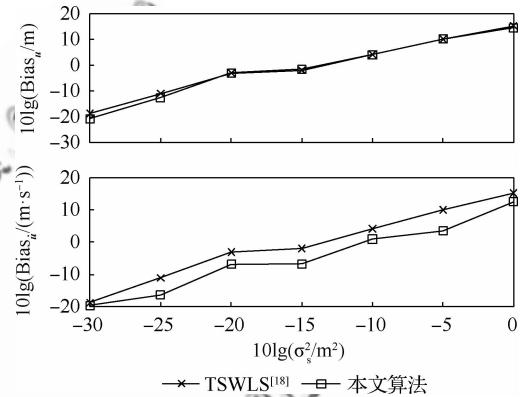


图 6 两个不相交目标参数估计偏差对比

Fig. 6 Comparison of parameters estimation of bias for two disjoint sources.

5 计算量分析

本节主要对所提出算法的计算复杂度进行分析,为了分析简便,主要以实数乘法进行分析。

首先分析本文算法第 1 步的计算量。

1) 计算 \mathbf{W}_1 :包括计算① $\mathbf{B}_1 \mathbf{Q}_a \mathbf{B}_1^T$,② $\mathbf{D}_1 \mathbf{Q}_d \mathbf{D}_1^T$,③求逆运算,以上每个步骤分别需要进行 $16(M-1)^3$ 、 $36(M-1)M^2$ 以及 $8(M-1)^3$ 次实数乘法。

2) 计算 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$:需要分别计算① $\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1$,② $\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{G}_1$,③ $(\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{G}_1)^{-1}$,④ $(\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1$,⑤ $(\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{h}_1$,一共需要 $32(M-1)^2 + 272(M-1) + 512$ 次实数乘法。

接下来给出第 2 步计算量的分析过程,第 2 步中计算与观测站数目无关,因此能够得到准确的乘法次数。

1) 计算 \mathbf{W}_2 :包括计算① \mathbf{B}_2^{-T} ,② $\mathbf{B}_2^{-T} \text{cov}^{-1} \hat{\boldsymbol{\phi}}_1$,③ $\mathbf{B}_2^{-T} (\text{cov} \hat{\boldsymbol{\phi}}_1)^{-1} \mathbf{B}_2$,一共需要进行 $3 \times 8^3 = 1536$ 次实数乘法。

2) 计算 $\hat{\phi}_2$: 包括计算① $\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2$, ② $\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2$, ③ $(\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1}$, ④ $(\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{G}_2^T$, ⑤ $(\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2$, ⑥ $(\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{h}_2$ 一共需要进行 2760 次实数乘法。

此外,由于 TSWLS 的第 1 步需要对加权矩阵初始化,并且更新加权矩阵 \mathbf{W}_1 一般需要重复计算两次,则第 1 步中 1) 需要计算 2 次,2) 需要计算 3 次,因此本文提出的算法一共需要 $(120M^3 - 120M^2 + 688M + 5688)$ 次的实数乘法运算。同样,文献[17-18]中的 TSWLS 算法第 2 步均与观测站数目无关,计算量主要都体现在了第 1 步中,因此本文算法与它们计算量相当,这从表 2 中也可以看出,表 2 中给出了考虑传感器参数误差存在情况下不同算法的平均 CPU 运行时间,显然 TSWLS 算法以及本文算法计算量相当。而 SDR 算法需要进行大量的运行时间。本文算法具有相当高的实时性,这一点在定位解算中具有重要意义。

表 2 不同算法平均 CPU 执行时间

Table 2 Average CPU run times for different algorithms

场景	算法	平均 CPU 运行时间/ms
单个目标	SDR 算法 ^[13]	164.50
	TSWLS 算法 ^[17]	0.29
	本文算法	0.27
两个目标	TSWLS 算法 ^[18]	0.95
	本文算法	0.83

6 结论

1) 所提出算法在测量噪声较小时能够实现 CRLB。另外,经过适当的维度调整,可以应用于多非相交源的定位场景中。

2) 所提算法计算复杂度与 TSWLS 算法相当,同时能提供不高于 SDR 算法的均方根误差和偏差估计性能。

参 考 文 献

- [1] 田中成, 刘聪峰. 无源定位技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015: 8-12.
TIAN Z C, LIU C F. Passive locating technology[M]. Beijing: National Defence Industry Press. 2015: 8-12 (in Chinese).

- [2] PATWARI N, ASH J, KYPEROUNTAS S, et al. Locating the nodes: Cooperative localization in wireless sensor networks[J]. IEEE Signal Process Magazine, 2005, 22 (4): 54-69.
- [3] 朱国辉, 冯大政, 聂卫科. 传感器位置误差情况下基于多维标度分析的时差定位算法[J]. 电子学报, 2016, 44 (1): 21-26.
ZHU G H, FENG D Z, NIE W K. Multidimensional scaling based TDOA localization algorithm with sensor location errors[J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(1): 21-26 (in Chinese).
- [4] LE T K, HO K C. Uncovering source ranges from range differences observed by sensors at unknown positions: Fundamental theory [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67(10): 2665-2678.
- [5] HAO B J, GU L M, LI Z, et al. Passive radar source localisation based on PSAAA using single small size aircraft [J]. IET Signal Processing, 2016, 10(7): 1191-1200.
- [6] 朱建丰, 陈玥, 郝本建, 等. 基于合成孔径阵列的雷达辐射源被动定位技术研究[J]. 电子学报, 2017, 45(10): 22-26.
ZHU J F, CHEN Y, HAO B J. Passive radar source localization using synthetic aperture antenna array[J]. Acta Electronica Sinica, 2017, 45(10): 22-26 (in Chinese).
- [7] NORTHARD T, NARDONE S C. Track-before-detect bearings-only localization performance in complex passive sonar scenarios: A case study[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2019, 44(2): 482-491.
- [8] LIU H P, SUN F C, FANG B, et al. Robotic room-level localization using multiple sets of sonar measurements[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements [J]. 2017, 66(1): 2-13.
- [9] SALVATI D, DRIOLI C, FORESTI G L. Sound source and microphone localization from acoustic impulse responses[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016, 23(10): 1459-1463.
- [10] FOY W H. Position-location solutions by Taylor-series estimation[J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems, 1987, 12(2): 187-194.
- [11] TOORRIER D J. Statistical theory of passive location systems[J]. IEEE Transaction on Aerospace & Electronic System, 1984, 20(2): 183-198.
- [12] HO K C, XU W W. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(9): 2453-2463.
- [13] WANG G, LI Y, ANSARI N. A semidefinite relaxation method for source localization using TDOA and FDOA measurements[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2013, 62(2): 852-863.

- [14] WANG Y L, WU Y. An efficient semidefinite relaxation algorithm for moving source localization using TDOA and FDOA measurements[J]. IEEE Communication Letters, 2017, 21(1): 80-83.
- [15] 刘洋, 杨乐, 郭福成, 等. 基于定位误差修正的运动目标TDOA/FDOA无源定位方法[J]. 航空学报, 2015, 36(5): 1617-1626.
- LIU Y, YANG L, GUO F C, et al. Moving targets TDOA/FDOA passive localization algorithm based on localization error refinement[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(5): 1617-1626 (in Chinese).
- [16] QU X M, XIE L H, TAN W R. Iterative constrained weighted least squares source localization using TDOA and FDOA measurements[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(15): 3990-4003.
- [17] HO K C, LU X, KOVAVISARUCH L. Source localization using TDOA and FDOA measurements in the presence of receiver location errors: Analysis and solution[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(2): 684-696.
- [18] SUN M, HO K C. An asymptotically efficient estimator for TDOA and FDOA positioning of multiple disjoint sources in the presence of sensor location uncertainties[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(7): 3434-3440.
- [19] LIU Y, GUO F C, YANG L, et al. An improved algebraic solution for TDOA localization with sensor position errors[J]. IEEE Communication Letters, 2015, 19(12): 2218-2221.
- [20] CAO J M, WAN Q, OUYANG X X, et al. Multidimensional scaling-based passive emitter localisation from time difference of arrival measurements with sensor position uncertainties[J]. IET Signal Processing, 2017, 11(1): 43-50.
- [21] KAY S M. Fundamentals of statistical signal processing volume I: Estimation theory[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998: 23-45.

附录 A

这里给出了 $\partial \alpha^o / \partial \phi_2^o$ 和 $\partial \alpha^o / \partial \beta^o$ 的具体表达式以及测量噪声较小时 $\mathbf{G}_3 = \partial \alpha^o / \partial \phi_2^o$ 和 $\mathbf{G}_4 = -\partial \alpha^o / \partial \beta^o$ 的具体证明过程。首先当测量噪声较小时有如下条件成立

条件①: $|\Delta r_{il}| \ll |r_i^o|$ 与 $|\Delta \dot{r}_{il}| \ll |r_i^o|$

条件②: $|\Delta s_i| \ll |r_i^o|$ 与 $|\Delta \dot{s}_i| \ll |r_i^o|$

$\partial \alpha^o / \partial \phi_2^o$ 写为分块矩阵可以表示为

$$\frac{\partial \alpha^o}{\partial \phi_2^o} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \mathbf{u}^o} & \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \dot{\mathbf{u}}^o} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^o}{\partial \mathbf{u}^o} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^o}{\partial \dot{\mathbf{u}}^o} \end{bmatrix} \quad (A1)$$

式中: $\frac{\partial \mathbf{r}^o(\theta)}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{O}_{(M-1) \times 3}$, $\frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \mathbf{u}^o}$ 、 $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^o}{\partial \mathbf{u}^o}$ 与 $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^o}{\partial \dot{\mathbf{u}}^o}$ 的

第 $i-1$ 行分别表示为

$$\frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \mathbf{u}^o}(i-1, :) = \boldsymbol{\rho}_{u^o, s_i^o}^T - \boldsymbol{\rho}_{u^o, s_1^o}^T \quad (A2)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^o}{\partial \mathbf{u}^o}(i-1, :) = \boldsymbol{\rho}_{u^o, s_i^o}^T - \boldsymbol{\rho}_{u^o, s_1^o}^T \quad (A3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}^o(\theta)}{\partial \dot{\mathbf{u}}^o}(i-1, :) = \boldsymbol{\gamma}_{u^o, s_i^o}^T - \boldsymbol{\gamma}_{u^o, s_1^o}^T \quad (A4)$$

式中: $\boldsymbol{\rho}_{u^o, s_i^o} = \frac{\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o}{r_i^o}$, $\boldsymbol{\gamma}_{u^o, s_i^o} = \frac{\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_i^o}{r_i^o} - \frac{\boldsymbol{\rho}_{u^o, s_i^o} \cdot \dot{r}_i^o}{r_i^o}$

且 $i = 2, 3, \dots, M-1$ 。

同样, $\partial \alpha^o / \partial \beta^o$ 写为分块矩阵为

$$\frac{\partial \alpha^o}{\partial \beta^o} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \mathbf{s}^o} & \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \dot{\mathbf{s}}^o} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^o}{\partial \mathbf{s}^o} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^o}{\partial \dot{\mathbf{s}}^o} \end{bmatrix} \quad (A5)$$

式中: $\frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \dot{\mathbf{s}}^o} = \mathbf{O}_{(M-1) \times 3M}$, $\frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \mathbf{s}^o}$ 、 $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^o}{\partial \mathbf{s}^o}$ 与 $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^o}{\partial \dot{\mathbf{s}}^o}$ 的第 $i-1$ 分别表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \dot{\mathbf{s}}^o}(i-1, :) &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^o}{\partial \dot{\mathbf{s}}^o}(i-1, :) \\ &= [\boldsymbol{\rho}_{u^o, s_1^o}^T, \mathbf{0}_{3(i-2) \times 1}^T, -\boldsymbol{\rho}_{u^o, s_i^o}^T, \mathbf{0}_{3(M-i) \times 1}^T] \end{aligned} \quad (A6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^o}{\partial \dot{\mathbf{s}}^o}(i-1, :) &= [\boldsymbol{\gamma}_{u^o, s_1^o}^T, \mathbf{0}_{3(i-2) \times 1}^T, -\boldsymbol{\gamma}_{u^o, s_i^o}^T, \mathbf{0}_{3(M-i) \times 1}^T] \end{aligned} \quad (A7)$$

且 $i = 2, 3, \dots, M-1$ 。

将相关矩阵代入 $\mathbf{G}_3 = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{G}_1 \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{G}_2$ 以及 $\mathbf{G}_4 = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{D}_1$, 经过一些简单的矩阵运算, 同时利用条件①和条件②可以得到

$$\mathbf{G}_3 = \partial \alpha^o / \partial \phi_2^o, \mathbf{G}_4 = -\partial \alpha^o / \partial \beta^o \quad (A8)$$

(责任编辑: 苏磊)

TDOA/FDOA passive localization algorithm for moving target with sensor parameter errors

SUN Ting, DONG Chunxi *

School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China

Abstract: In a moving target passive localization system, the premise of many algorithms is that the position and velocity of the sensors are accurately known. However, there exists some noise disturbances in the parameters of available sensors. Aiming to solve this problem, an improved Two-Step Weighted Least Squares (TSWLS) localization algorithm using Time Difference of Arrival (TDOA) and Frequency Difference of Arrival (FDOA) is proposed. The proposed algorithm is a closed-form solution and is divided into two steps. While the first step is the same as that of the typical TSWLS method, the second step further studies the relationship between the nuisances and the target parameters, establishing a new matrix equation. Then, the final solution is given via Weighted Least Squares (WLS) technique. Theoretical analysis proves that this method can reach the Cramér-Rao Lower Bound (CRLB) at a low noise level. The proposed algorithm in this paper has the advantages of low computational complexity and high real-time performance. In addition, this method is also suitable for locating multiple disjoint sources after appropriate dimensional adjustment. Simulations further demonstrate the effectiveness of the theoretical analysis.

Keywords: passive localization; time difference of arrival; frequency difference of arrival; sensor position errors; Cramér-Rao lower bound

Received: 2019-07-26; **Revised:** 2019-08-20; **Accepted:** 2019-09-29; **Published online:** 2019-10-08 11:01

URL: <http://hkxb.buaa.edu.cn/ON/html/20200224.html>

* **Corresponding author.** E-mail: chxdong@mail.xidian.edu.cn