

基于终端角度约束的二阶滑模制导律设计

郭建国^{1,*}, 韩拓¹, 周军¹, 王国庆²

1. 西北工业大学 精确制导与控制研究所, 西安 710072

2. 中国运载火箭技术研究院 研发中心, 北京 100076

摘要: 针对空地导弹具有终端角度约束条件的制导律设计问题, 提出了一种在有限时间内稳定的新型二阶滑模制导律。首先, 在弹目相对运动学模型基础上, 将终端弹道倾角约束转化为终端视线(LOS)角度约束, 作为制导系统的终端控制目标。其次, 通过选取一种新型二阶滑模面, 结合螺旋控制算法的思想, 设计了一种二阶滑模变结构制导律, 来抑制系统中的不确定性因素, 从而满足零化视线角速率和制导系统的终端角度约束条件的要求。采用一种新的 Lyapunov 函数, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 严格证明了制导系统在有限时间内的稳定性。最后, 对空地导弹制导系统进行数字仿真, 通过和一阶传统滑模制导律以及基于超螺旋算法的二阶滑模制导律进行对比分析, 验证了所设计的制导律在保证制导精度的同时, 更能在有限时间内提高终端约束角度的精度, 并且避免了超螺旋算法中参数选取较多的问题。

关键词: 二阶滑模; 制导律; 螺旋控制; 角度约束; 有限时间稳定

中图分类号: V488.133

文献标识码: A

文章编号: 1000-6893(2017)02-320208-10

制导律设计是空地导弹攻击目标的重要技术环节, 除了要达到一定的制导精度, 所设计的制导律还要满足视线角速率和角度约束在有限时间内收敛的要求。由于传统的比例导引律往往不能达到令人满意的效果, 并且已经不能适应导弹制导系统发展的要求, 因此采用先进控制理论设计具有终端角度约束制导律的方法得到了迅速发展。文献[1]基于线性二次型次优控制方法, 针对地面机动目标设计了终端角度约束制导律。文献[2]提出了偏置比例导引律, 但是会带来较大的角度约束误差。文献[3-4]针对无机动的目标设计了具有终端角度约束的比例制导律, 文献[5-9]设计了基于最优控制方法的终端角度约束制导律, 文献[10]针对机动目标设计了具有终端角度约束的几何制导律, 但是需要准确已知目标加速度。此

外, 文献[11-13]基于变结构控制理论设计了终端角度约束制导律, 在保证角度约束在有限时间内收敛的同时, 能够准确命中静止目标或机动目标, 但是由于非线性切换函数的存在, 使这些制导律都存在抖振问题。为此, 文献[14]在设计相应的滑模制导律时, 采用饱和函数替代非线性切换函数, 以达到削弱抖振的目的。文献[15-16]提出了具有终端角度约束的二阶滑模制导律, 保证了制导系统在有限时间内收敛, 并消除了抖振问题; 文献[17]设计了基于超螺旋算法的二阶滑模制导律, 但是参数选取较多, 并且未给出收敛时间公式。

由于二阶滑模变结构控制理论具有算法简单、易于设计与实现、避免抖振、鲁棒性强、有限时间收敛等优点^[18-19], 文献[19-20]分别提出了基于超螺旋算法和螺旋算法的二阶滑模控制方法。其

收稿日期: 2016-03-09; 退修日期: 2016-04-06; 录用日期: 2016-05-26; 网络出版时间: 2016-06-02 10:13

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20160602.1013.006.html

基金项目: 国家自然科学基金 (61473226)

* 通讯作者. E-mail: guojanguo@nwpu.edu.cn

引用格式: 郭建国, 韩拓, 周军, 等. 基于终端角度约束的二阶滑模制导律设计[J]. 航空学报, 2017, 38(2): 320208. GUO J G, HAN T, ZHOU J, et al. Second-order sliding-mode guidance law with impact angle constraint[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2017, 38(2): 320208.

中,两种算法主要存在以下几点不同之处^[21]:①表达形式不同,螺旋算法中同时含有滑模变量和滑模变量的一阶导数,而超螺旋算法中并不含有滑模变量的一阶导数;②使用条件不同,螺旋算法是应用在相对阶等于1或者2的系统,而超螺旋算法只能应用在相对阶等于1的系统;③稳定性证明方法不同,针对螺旋算法和超螺旋算法的稳定性问题,文献[22-23]基于Lyapunov函数证明了超螺旋算法的稳定性,文献[24]进一步给出了超螺旋算法的有限收敛时间。由于超螺旋算法的稳定性证明是在系统相对阶为1的基础上进行证明的,这使得超螺旋算法的Lyapunov稳定性分析方法无法应用在螺旋算法的稳定性证明之中。因此,针对螺旋算法的稳定性问题,文献[19]基于齐次理论证明了螺旋算法的有限时间稳定性,但是证明过程较为复杂。

基于以上不同之处,本文在结合螺旋算法的思想^[25]、基于PID滑模面^[26]设计二阶滑模制导律时,利用Lyapunov函数的方法证明了螺旋算法的有限时间稳定性,证明方法较为简单,并给出了有限收敛时间表达式,同时解决了终端角度约束的有限时间收敛问题。该方法不仅避免了二阶滑模变结构制导律设计中对视线角三次求导的问题,还提高了滑模收敛速度,也实现了制导系统的有限时间稳定性,同时克服了制导系统的不确定性和外部干扰等因素的影响。

在研究该问题时,基于弹目相对运动学关系,将终端弹道倾角约束转化为终端视线(LOS)角度约束,作为制导系统的控制目标。选取一种新型二阶滑模面,结合螺旋算法的思想,设计了空地导弹制导系统的末制导律。然后,利用Lyapunov稳定理论证明了制导系统在有限时间内的稳定性,并给出了收敛时间公式。最后,通过数字仿真对所设计方案进行了验证,并与一阶传统滑模制导律和基于超螺旋算法的二阶滑模制导律进行了仿真对比。仿真结果表明,所设计的制导律能够迅速命中目标,满足约束条件,具有较强的鲁棒特性和良好的动态性能品质。

本文的研究工作具有以下几个创新点:

1)提出了一种基于PID滑模面的新型二阶滑模制导律,避免了二阶滑模制导律求解过程中对视线角进行三次求导的问题。

- 2)针对螺旋算法的稳定性问题,利用Lyapunov函数的方法证明了系统的有限时间稳定性。
- 3)给出了收敛时间的求解方法,解决了终端角度约束在有限时间内收敛的问题。

1 弹目相对运动数学模型

考虑在末制导过程中,空地导弹与目标的相对运动学关系如图1所示。图中: $OXYZ$ 为惯性坐标系, $OX_TY_TZ_T$ 为导弹末制导过程的视线坐标系,M表示导弹,T表示目标。参考文献[27]的内容,可以得到弹目相对运动模型为

$$\ddot{R} - R\dot{q}^2 - R\dot{\theta}^2 \cos^2 q = a_{tx} - a_{mx} \quad (1)$$

$$R\ddot{q} + 2R\dot{q}\dot{\theta} + R\dot{\theta}^2 \cos q \sin q = a_{ty} - a_{my} \quad (2)$$

$$-R\dot{\theta} \cos q - 2R\dot{\theta} \cos q + 2R\dot{q}\dot{\theta} \sin q = a_{tz} - a_{mz} \quad (3)$$

式中: a_{mx} 、 a_{my} 、 a_{mz} 与 a_{tx} 、 a_{ty} 、 a_{tz} 分别为导弹和目标在视线坐标系 $OX_TY_TZ_T$ 上的加速度分量; R 为弹目相对距离; q 和 θ 分别为弹目视线角和导弹弹道倾角。

为了简化制导律设计,可以将三维相对运动数学模型分解为纵向平面模型和侧向平面模型,即式(2)和式(3)。本文研究的是变结构制导律,不失一般性,选取纵向平面进行制导律设计。根据式(2)可得到如下数学模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_2 + bu + d \end{cases} \quad (4)$$

式中:

$$\begin{cases} x_1 = q, x_2 = \dot{q}, u = a_{my} \\ a = -2\dot{R}/R > 0, b = -1/R < 0 \\ d = -\dot{\theta}^2 \cos q \sin q + a_{ty}/R \end{cases}$$

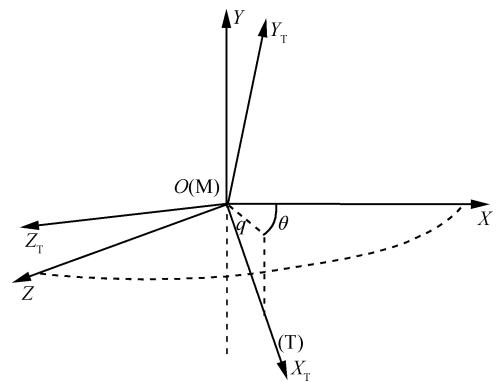


图1 弹目相对运动示意图

Fig. 1 Sketch diagram of missile-target relative motion

由于导弹测量所得的角度和角速度等数值的有界性,可以将 d 看作有界干扰项,即 $|d| \leq \sigma$, σ 为大于零的常数。

在导弹精确打击地面目标时,要求导弹在命中点的弹道倾角达到期望的角度 θ_f 。设命中点处期望的视线角为 q_f ,在目标不机动情况下,有^[28]

$$V_t \sin(\theta_t - q_f) - V_m \sin(\theta_m - q_f) = 0 \quad (5)$$

式中: V_t 和 V_m 分别为目标和导弹的速度; θ_t 和 θ_m 分别为目标和导弹的弹道倾角,并且满足 $|\theta_t - q_f| < \pi/2$ 。当忽略地面目标速度,即 $V_t = 0$ m/s 时,由式(5)可知,

$$\sin(\theta_m - q_f) = 0$$

因此,终端角度约束为:当 $q_f = \theta_f$ 时, $\theta_m = \theta_f$ 。

2 二阶滑模制导律设计

2.1 二阶滑模制导律

考虑如式(2)所示的纵向平面弹目相对运动数学模型,设计二阶滑模制导律。根据制导系统设计的准平行接近原理,需要弹目视线角速率在末制导过程中趋近于零,即 $\dot{q} \rightarrow 0$ 。

所设计的二阶滑模制导律,其目的是让制导系统到达并且稳定在滑模面 $s(t)$ 和滑模面一阶导数 $\dot{s}(t)$ 上。为了避免二阶滑模制导律设计中对视线角三次求导的问题,本文选取二阶滑模面为^[26,29]

$$\dot{s}(t) + \beta s(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \dot{e}(t) \quad (6)$$

式中: k_p 、 k_i 、 k_d 和 β 均为正常数, β 表示 $s(t)$ 的衰减速率; $e(t) = q - q_f$ 。 $s(t)$ 的表达式为

$$s = R(q - q_f) \quad (7)$$

显然,当式(6)所示的滑动模态满足 $s(t) = \dot{s}(t) = 0$ 时,即 $q = q_f$, $\dot{q} = 0$, $R = 0$,则实现了准平行接近原理。

为了得到二阶滑模面的表达式,将式(6)两端分别对时间求一次导数,可以得到

$$\ddot{s}(t) + \beta \dot{s}(t) = k_p \dot{e}(t) + k_i e(t) + k_d \ddot{e}(t) \quad (8)$$

结合式(4),并展开式(8)右边可得到

$$\ddot{s}(t) + \beta \dot{s}(t) = k_p \dot{e}(t) + k_i e(t) + k_d(ax_2 + bu(t) + d) \quad (9)$$

选取等效制导律为

$$u_{eq}(t) = -(k_d b)^{-1} (k_p \dot{e}(t) + k_i e(t) - k_d \dot{ax}_2 - k_d d) \quad (10)$$

其中,参数 k_p 、 k_i 和 k_d 的选取原则是使多项式 $k_p \dot{e}(t) + k_i e(t) + k_d \ddot{e}(t)$ 成为赫尔维茨多项式^[30]。将式(10)代入式(9),得到

$$\ddot{s}(t) = k_d d \quad (11)$$

式中: $|k_d d| \leq \varsigma$, ς 为大于零的常数。

如果式(11)中的 $k_d d = 0$,则可以得到理想的误差模型为

$$\ddot{s}(t) = 0 \quad (12)$$

然而,实际制导系统中总是存在不确定性和外部干扰,使误差 $e(t)$ 无法为零。为了抵消干扰,采用扭曲制导律如式(13)所示^[25]:

$$u_{sw}(t) = -(k_d b)^{-1} (k_1 \operatorname{sgn}(s(t)) + k_2 \operatorname{sgn}(\dot{s}(t))) \quad (13)$$

式中: k_1 和 k_2 均为大于零的常数,且 k_1 、 k_2 满足:

$$\begin{cases} k_1 \geq k_2 + \varsigma \\ k_2 \geq \varsigma \end{cases} \quad (14)$$

综合式(10)的等效制导律和式(13)的扭曲制导律,可以得到二阶滑模制导律为

$$\begin{aligned} u(t) = u_{eq}(t) + u_{sw}(t) = & -(k_d b)^{-1} (k_p \dot{e}(t) + k_i e(t) - \beta \dot{s}(t) + k_d a x_2) \\ & - (k_d b)^{-1} (k_1 \operatorname{sgn}(s(t)) + k_2 \operatorname{sgn}(\dot{s}(t))) \end{aligned} \quad (15)$$

2.2 有限时间稳定性证明

将式(15)代入式(9),得到

$$\ddot{s}(t) = k_d d(x) - k_1 \operatorname{sgn}(s(t)) - k_2 \operatorname{sgn}(\dot{s}(t)) \quad (16)$$

为了证明稳定性,令

$$\begin{cases} z = s(t), y = \dot{s}(t) \\ \eta = k_d d, |\eta| \leq \varsigma \\ \tau = -k_1 \operatorname{sgn}(z) - k_2 \operatorname{sgn}(y) \end{cases}$$

则式(16)可以转化为

$$\begin{cases} \dot{z} = y \\ \dot{y} = \eta + \tau \end{cases} \quad (17)$$

选取 Lyapunov 函数^[31]为

$$V(z, y) = \begin{cases} \frac{l^2}{4} \left(\frac{y \operatorname{sgn}(z)}{\gamma} + l_0 \sqrt{|z| + \frac{y^2}{2\gamma}} \right)^2 & zy \neq 0 \\ \frac{m^2 y^2}{4} & z = 0 \\ \frac{|z|}{4} & y = 0 \end{cases} \quad (18)$$

式中: $m > 0$; γ 的表达式为

$$\gamma = k_1 + k_2 \operatorname{sgn}(zy) - \varsigma \operatorname{sgn}(zy) \quad (19)$$

根据式(18)中 $V(0, y)$ 和 $V(z, 0)$ 的表达式可知

$$\begin{cases} m^2 = l^2 \left(\frac{\operatorname{sgn}(zy)}{\gamma} + \frac{l_0}{\sqrt{2}\gamma} \right)^2 \\ 1 = l^2 l_0^2 \end{cases} \quad (20)$$

则根据式(20)进一步可以得到

$$\begin{cases} l = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} + \sqrt{2\gamma m - 1} > 0 \\ l_0 = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(zy)}{\sqrt{2\gamma m - 1}} \end{cases} \quad (21)$$

引理 1 当 k_1 和 k_2 满足式(14)的条件, 且 m 满足式(21)的关系式时, 有

$$\begin{cases} 1/\sqrt{2(k_1 + k_2 - \varsigma)} < m < 1/\sqrt{2(k_1 - k_2 + \varsigma)} \\ l_0 > 0 \quad zy \neq 0 \end{cases} \quad (22)$$

证明 根据式(18)可以得到

$$\frac{2\sqrt{V(z, y)}}{l} = \frac{y \operatorname{sgn}(z)}{\gamma} + l_0 \sqrt{|z| + \frac{y^2}{2\gamma}} \quad (23)$$

由式(19)可知, 当 $zy > 0$ 时, $\gamma = k_1 + k_2 - \varsigma$; 当 $zy < 0$ 时, $\gamma = k_1 - k_2 + \varsigma$; 当 $zy = 0$ 时, $\gamma = k_1$ 。结合式(15), 显然有 $\gamma > 0$ 恒成立, 因此, $\sqrt{|z| + y^2/2\gamma}$ 是有意义的。

由式(23)可知, $2\sqrt{V(z, y)}/l$ 恒为非负, 因此有

$$l_0 > -\frac{\operatorname{sgn}(zy) \sqrt{2/\gamma}}{\sqrt{2\gamma |z| / y^2 + 1}} \quad (24)$$

结合式(21)和式(24)可得

$$\sqrt{\frac{2}{\gamma}} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(zy)}{\sqrt{2\gamma m - 1}} > -\frac{\operatorname{sgn}(zy) \sqrt{2/\gamma}}{\sqrt{2\gamma |z| / y^2 + 1}} \quad (25)$$

当 $zy > 0$ 时, 有 $\gamma_1 = k_1 + k_2 - \varsigma$, 可以得到

$$1/(\sqrt{2\gamma_1} m - 1) > -1/\sqrt{2\gamma_1 |z| / y^2 + 1} \quad (26)$$

当 $zy < 0$ 时, 有 $\gamma_2 = k_1 - k_2 + \varsigma$, 可以得到

$$1/(1 - \sqrt{2\gamma_2} m) > 1/\sqrt{2\gamma_2 |z| / y^2 + 1} \quad (27)$$

结合式(26)和式(27), 可得

$$1/\sqrt{2\gamma_1} < m < 1/\sqrt{2\gamma_2} \quad (28)$$

将 γ_1 和 γ_2 代入式(28), 则有

$$1/\sqrt{2(k_1 + k_2 - \varsigma)} < m < 1/\sqrt{2(k_1 - k_2 + \varsigma)}$$

由式(21)可知, 当 $zy > 0$ 时, 有

$$l_0 = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\gamma_1} m - 1} \quad (29)$$

当 $zy < 0$ 时, 有

$$l_0 = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2\gamma_2} m - 1} \quad (30)$$

显然, 通过式(28)~式(30), 以及 $\gamma > 0$ 恒成立, 可以得到 $l_0 > 0, zy > 0; l_0 > 0, zy < 0$, 即 $l_0 > 0, zy \neq 0$

引理 2 当 $|\eta| \leq \varsigma$ 时, 选取 γ 如式(19)所示, $\bar{\gamma}$ 如式(31)所示,

$$\begin{cases} \bar{\gamma} = -y \operatorname{sgn}(z) = -\eta \operatorname{sgn}(z) - \tau \operatorname{sgn}(z) = \\ k_1 + k_2 \operatorname{sgn}(zy) - \eta \operatorname{sgn}(z) \end{cases} \quad (31)$$

且 k_1 和 k_2 满足式(14)的条件时, 则有式(32)所示的不等式恒成立。

$$\begin{cases} \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \geq 1 & zy > 0 \\ \frac{k_1 - k_2 - \varsigma}{k_1 - k_2 + \varsigma} \leq \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \leq 1 & zy < 0 \end{cases} \quad (32)$$

证明 分别讨论 $zy > 0$ 和 $zy < 0$ 的情况:

1) 当 $zy > 0$ 时, 分为两种情况进行讨论, 即

a) 当 $z > 0, y > 0$ 时, 有

$$\bar{\gamma} = k_1 + k_2 - \eta, \gamma = k_1 + k_2 - \varsigma$$

由于 $|\eta| \leq \varsigma$, 则可以得到 $\bar{\gamma} \geq \gamma$ 。

b) 当 $z < 0, y < 0$ 时, 有

$$\bar{\gamma} = k_1 + k_2 + \eta, \gamma = k_1 + k_2 - \varsigma$$

由于 $|\eta| \leq \varsigma$, 同样可以得到 $\bar{\gamma} \geq \gamma$ 。

因此, 当 $zy > 0$ 时, 有 $\bar{\gamma} \geq \gamma$ 成立, 即 $\bar{\gamma}/\gamma \geq 1$ 成立。

2) 当 $zy < 0$ 时, 分为两种情况进行讨论, 即

a) 当 $z > 0, y < 0$ 时, 有

$$\bar{\gamma} = k_1 - k_2 - \eta, \gamma = k_1 - k_2 + \varsigma$$

$$\begin{cases} \bar{\gamma} = \frac{k_1 - k_2 - \eta}{k_1 - k_2 + \varsigma} \end{cases}$$

由于 $|\eta| \leq \varsigma$, 则可以得到

$$\begin{cases} \bar{\gamma} \leq \gamma \\ \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \geq \frac{k_1 - k_2 - \varsigma}{k_1 - k_2 + \varsigma} \end{cases}$$

b) 当 $z < 0, y > 0$ 时, 有

$$\begin{cases} \bar{\gamma} = k_1 - k_2 + \eta, \gamma = k_1 - k_2 + \varsigma \\ \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} = \frac{k_1 - k_2 + \eta}{k_1 - k_2 + \varsigma} \end{cases}$$

由于 $|\eta| \leq \varsigma$, 同样可以得到

$$\begin{cases} \bar{\gamma} \leq \gamma \\ \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \geq \frac{k_1 - k_2 - \varsigma}{k_1 - k_2 + \varsigma} \end{cases}$$

因此,当 $zy < 0$ 时,不等式 $\frac{k_1 - k_2 - \varsigma}{k_1 - k_2 + \varsigma} \leq \bar{\gamma} \leq 1$ 成立。

定理 1 当 k_1 和 k_2 满足式(14)的条件时,选取如式(18)所示的 Lyapunov 函数, γ 、 l 、 l_0 和 m 分别满足式(19)~式(22), 则系统方程式(17)是有限时间内稳定的, 即满足

$$\frac{dV(z, y)}{dt} \leq -l \frac{k_1 - k_2 - \varsigma}{k_1 - k_2 + \varsigma} \sqrt{V}$$

且有限到达时间为

$$T_f \leq \frac{2(k_1 - k_2 + \varsigma)}{l(k_1 - k_2 - \varsigma)} \sqrt{V(z(0), y(0))}$$

证明 当 $zy \neq 0$ 时, 易知 $V(z, y)$ 是连续可导函数, 因此, 对 $V(z, y)$ 进行求导, 得到

$$\begin{aligned} \frac{dV(z, y)}{dt} &= \frac{\partial V(z, y)}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial V(z, y)}{\partial y} \dot{y} = \\ &= \frac{l^2}{2} \left(\frac{y \operatorname{sgn}(z)}{\gamma} + l_0 \sqrt{|z| + \frac{y^2}{2\gamma}} \right) \cdot \\ &\quad \left[\frac{l_0}{2} \left(|z| + \frac{y^2}{2\gamma} \right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(z) \right] \dot{y} + \\ &\quad \frac{l^2}{2} \left(\frac{y \operatorname{sgn}(z)}{\gamma} + l_0 \sqrt{|z| + \frac{y^2}{2\gamma}} \right) \cdot \\ &\quad \left[\frac{\operatorname{sgn}(z)}{\gamma} + \frac{l_0}{2} \left(|z| + \frac{y^2}{2\gamma} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{y}{\gamma} \right] \dot{y} = \\ &= l \sqrt{V} \left[\frac{y \operatorname{sgn}(z)}{\gamma} + \frac{l_0}{2} \left(|z| + \frac{y^2}{2\gamma} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \cdot \\ &\quad \left(y \operatorname{sgn}(z) + \frac{y \dot{y}}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

将式(31)中的 $\bar{\gamma} = -y \operatorname{sgn}(z)$ 代入式(33)中, 可以得到

$$\frac{dV(z, y)}{dt} = -l \sqrt{V} \cdot$$

$$\left[\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} + \frac{l_0 \operatorname{sgn}(zy)}{2 \sqrt{|z| / y^2 + 1/2\gamma}} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} - 1 \right) \right] \quad (34)$$

根据式(32)所示的不等式关系, 容易得到:

当 $zy > 0$ 时, 有

$$\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} + \frac{l_0 \operatorname{sgn}(zy)}{2 \sqrt{|z| / y^2 + 1/2\gamma}} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} - 1 \right) \geq \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \geq 1 \quad (35)$$

当 $zy < 0$ 时, 有

$$\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} + \frac{l_0 \operatorname{sgn}(zy)}{2 \sqrt{|z| / y^2 + 1/2\gamma}} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} - 1 \right) \geq \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \geq \frac{k_1 - k_2 - \varsigma}{k_1 - k_2 + \varsigma} \quad (36)$$

由于

$$0 < \frac{k_1 - k_2 - \varsigma}{k_1 - k_2 + \varsigma} < 1 \quad (37)$$

则根据式(34)~式(37), 可以得到

$$\frac{dV(z, y)}{dt} \leq -l \frac{k_1 - k_2 - \varsigma}{k_1 - k_2 + \varsigma} \sqrt{V} \quad (38)$$

将式(38)改写为

$$\frac{dV(z, y)}{\sqrt{V}} \leq -l \frac{k_1 - k_2 - \varsigma}{k_1 - k_2 + \varsigma} dt \quad (39)$$

求解后可以得出

$$T_f \leq \frac{2(k_1 - k_2 + \varsigma)}{l(k_1 - k_2 - \varsigma)} \sqrt{V(z(0), y(0))} \quad (40)$$

式中: $V(z(0), y(0))$ 为 Lyapunov 函数在系统初始状态下的取值。

由此可知, 制导系统在 $t \rightarrow \infty$ 时, $V \rightarrow 0$, 同时有 $s(t) = \dot{s}(t) = 0$, 以及在 $t > T_f$ 时满足 $\ddot{s}(t) = 0$ 。即在选取如式(15)所示的二阶滑模制导律时, 可以实现制导系统的有限时间稳定性。

注 1 由于系统延迟因素, 式(13)所提出的扭曲制导律会导致小幅高频震颤, 从而影响制导系统的稳定性。因此, 将式(13)替换为式(41), 即

$$u_{sw}(t) = -(k_d b)^{-1} (k_1 \tanh(s(t)) +$$

$$k_2 \tanh(\dot{s}(t))) \quad (41)$$

式中: $\tanh(\cdot)$ 表示双曲正切函数。

注 2 对于实际制导系统, 只要末制导的剩余时间能够满足式(40)所示的有限时间, 就可保证导弹末制导系统的有效性。

注 3 文献[17]所提出的基于超螺旋算法的二阶滑模制导律, 参数选取繁多(15个参数), 而本文只需要选取6个参数。

注 4 在设计二阶滑模制导律时, 也可以去掉 PID 滑模面中的积分补偿项, 基于 PD 滑模面来设计二阶滑模面, 则得到的二阶滑模面和制导律形式更为简单, 相应的式(6)和式(15)可以改写为

$$\dot{s}(t) + \beta s(t) = k_p e(t) + k_d \dot{e}(t) \quad (42)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{eq}(t) + u_{sw}(t) = \\ &= -(k_d b)^{-1} (k_p \dot{e}(t) - \beta \dot{s}(t) + k_d a x_2) \\ &\quad - (k_d b)^{-1} (k_1 \operatorname{sgn}(s(t)) + k_2 \operatorname{sgn}(\dot{s}(t))) \end{aligned} \quad (43)$$

3 仿真分析

以某型空地导弹为研究对象进行制导系统数

学仿真研究,通过和一阶传统滑模变结构制导律^[32]、基于超螺旋算法的二阶滑模制导律^[17]进行仿真对比,验证本文所提出的二阶滑模制导律的有效性。

考虑初始末制导的弹目相对距离为2 500 m,导弹飞行马赫数 $Ma=0.7$;目标为地面固定目标;导弹初始弹道倾角为 0° ,期望的命中点时刻弹道倾角为 -30° ,导弹最大过载为 $5g$;本文所设计的二阶滑模制导律仿真参数选取为

$$k_p = 2, k_d = 0.2, k_i = 5$$

$$k_1 = 0.01, k_2 = 0.001, \beta = 0.32$$

通过 MATLAB 仿真软件进行数值计算,经过500次蒙特卡罗法仿真,得到3种制导律仿真结果对比如图2所示,图2(a)~图2(c)分别为视线角速率、视线角以及弹道倾角的变化对比曲线。图中:CSM表示一阶传统滑模变结构制导律;ST-2SM表示基于超螺旋算法的二阶滑模制导律;N-2SM表示本文所设计的新型二阶滑模制导律。

由图2(a)可知,本文设计的新型二阶滑模制导方法所得的视线角速率能够快速收敛到零,收敛速度最快,收敛时间约为2.32 s,基于超螺旋算法的二阶滑模制导方法所得的收敛时间约为4.98 s,而一阶传统滑模变结构制导方法所得到的收敛速度最慢,收敛时间约为5.95 s。由此可以看出,采用本文设计的新型二阶滑模制导方法所得的结果最好,收敛速度较其他两种方法有较大的提升。

由图2(b)和图2(c)可知,采用本文设计的新型二阶滑模制导方法所得的弹目视线角和弹道倾角均能够快速趋近于 -30° ,并且稳态误差基本为零;基于超螺旋算法的二阶滑模制导方法所得的视线角和弹道倾角收敛速度较慢,稳态误差较大,视线角和弹道倾角分别与终端角度期望值误差约为 0.32° 和 1.43° ;而一阶传统滑模变结构制导方法所得视线角和弹道倾角收敛速度最慢,稳态误差也最大,视线角和弹道倾角分别与终端角度期望值误差约为 0.74° 和 1.96° 。可以看出,新型二阶滑模制导方法较其他两种方法来说,能够更好地满足终端角度约束。

图3给出了本文所设计的二阶滑模制导律中 $s(t)$ 与 $\dot{s}(t)$ 的变化曲线。图4给出了导弹制导律

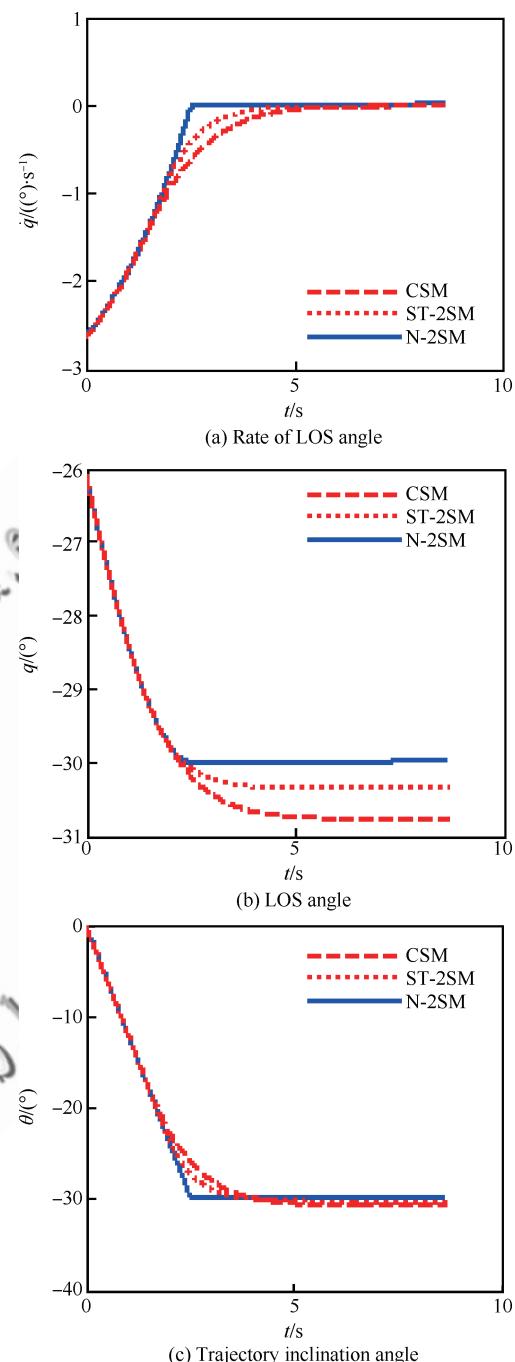


图2 3种制导方法的仿真结果对比
Fig. 2 Comparison of simulation results of three different guidance methods

的变化曲线。图5为PID与PD滑模面在制导参数完全相同时,所得制导效果的对比曲线。

由图3可知,采用本文选取的二阶滑模制导律所得滑动模态 $\dot{s}(t)$ 与 $s(t)$ 均能够在有限时间内快速收敛到零,并且克服了传统滑模方法容易出

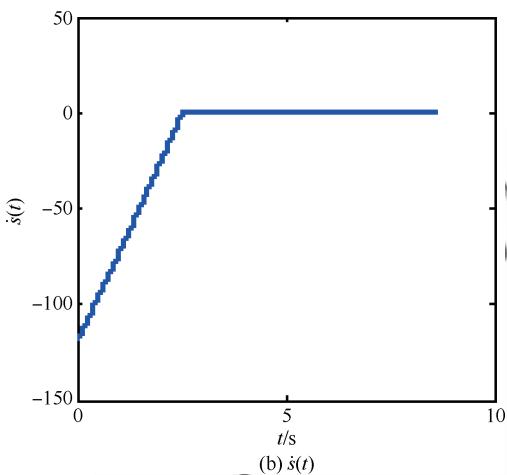
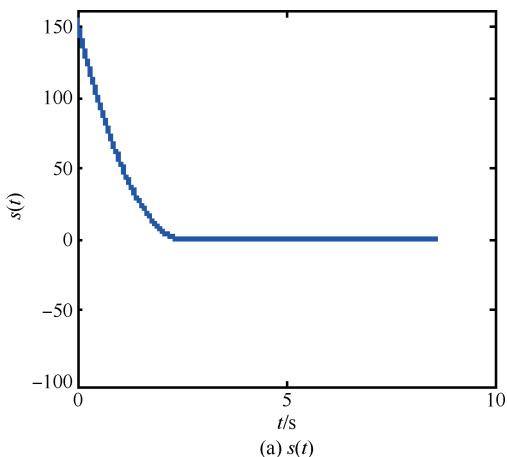
图 3 滑模面 $s(t)$ 及其一阶导数 $\dot{s}(t)$ 的变化曲线

Fig. 3 Variation curves of sliding-mode surface $s(t)$ and its first-order derivative $\dot{s}(t)$

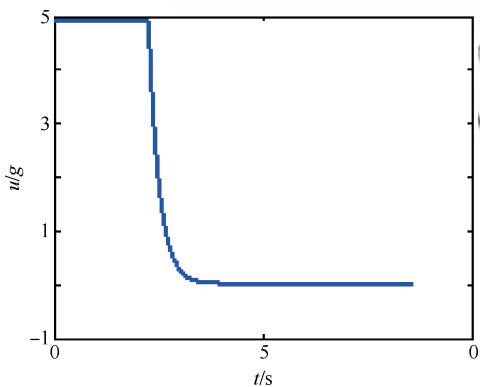


图 4 导弹制导律变化曲线

Fig. 4 Variation curve of missile guidance law

现抖振的问题,即在 2.32 s 之后,滑动模态 $s(t)=\dot{s}(t)=0$ 。由图 4 可知,所设计的制导律能够充分利用导弹机动能力,在末段所需过载较小,在命中点附近接近于零。

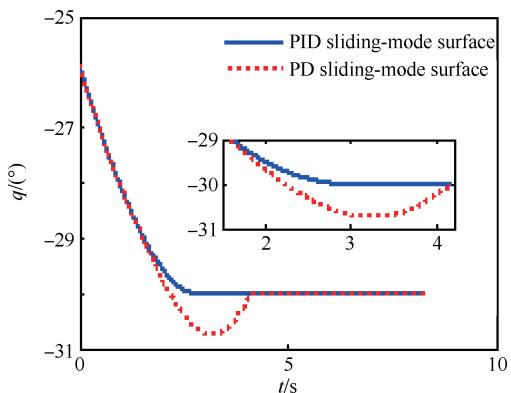


图 5 PID 与 PD 滑模面所得制导效果对比
Fig. 5 Comparison of guidance performances under PID/PD sliding-mode surfaces

由图 5 可以看出,两种滑模面所得制导律的制导效果差别并不大,视线角均能够快速收敛并稳定在期望的终端约束角度,但是 PD 滑模面所得视线角出现了一定的超调量(约 0.84°),显然,这是由于滑模面式(42)中缺少对误差的积分补偿项所导致的。因此,PID 型滑模面中的积分项在满足落角控制精度的同时,还能够起到减小超调量的作用。

为了说明本文制导律的鲁棒性,下面针对具有机动加速度的目标进行仿真验证。除此之外,还考虑了导弹的视线转率测量误差给制导系统带来的不确定性,这里视其为一正态分布的随机干扰量。具体的目标机动加速度和视线转率随机干扰量如下:

$$\begin{cases} a_t = 20 \text{ m/s}^2 \\ \Delta \dot{q} = N(0, 0.1^2) (\text{ }^\circ/\text{s}) \end{cases}$$

仿真得出随机干扰量、弹目运动轨迹和视线角的变化曲线如图 6~图 9 所示。

通过仿真分析发现,在考虑制导系统不确定性和目标机动加速度时,所设计的二阶滑模制导律能够较好地满足制导要求,使导弹有效命中目标,视线角也能快速收敛到期望的终端约束角度。

图 8 给出了未考虑随机干扰和考虑随机干扰下的视线角对比特性。从图中可以看出,两者的变化特性差别不大,其中,考虑随机干扰量的视线角曲线,最终以小幅振荡的形式稳定在期望的约束角度附近。图 9 为在考虑随机干扰时,分别采用 PID 和 PD 滑模制导律得到的视线角变化特性。仿真结果进一步验证了 PID 型滑模面在满足

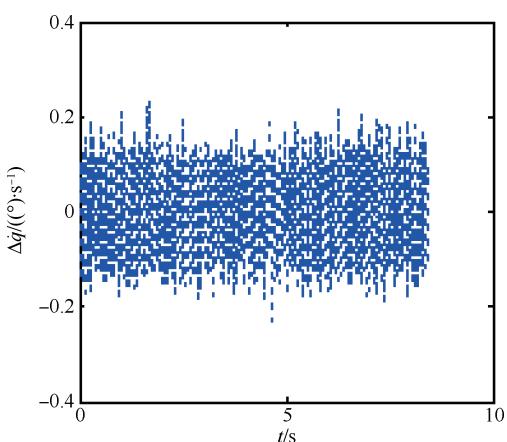


图 6 随机干扰量变化特性

Fig. 6 Various characteristics of random disturbance

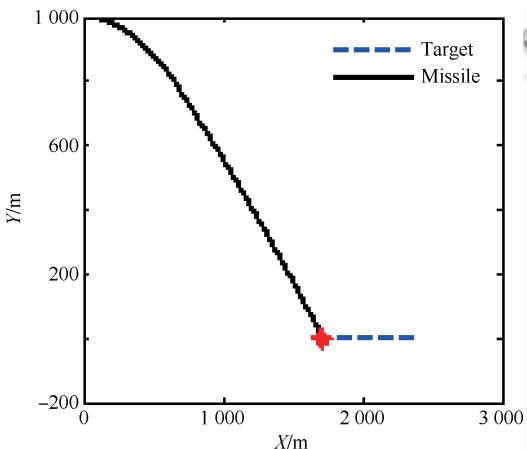


图 7 弹目运动轨迹

Fig. 7 Moving trajectories of missile and target

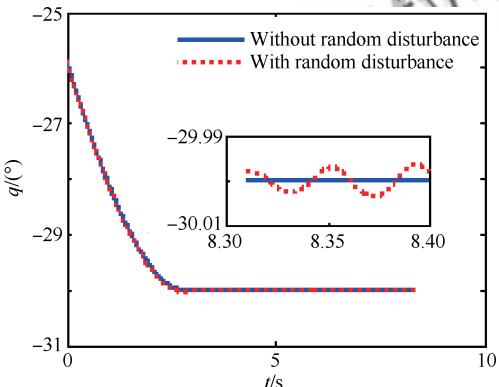


图 8 有无随机干扰时的视线角变化曲线对比

Fig. 8 Comparison of variation curves of LOS angle with or without random disturbance

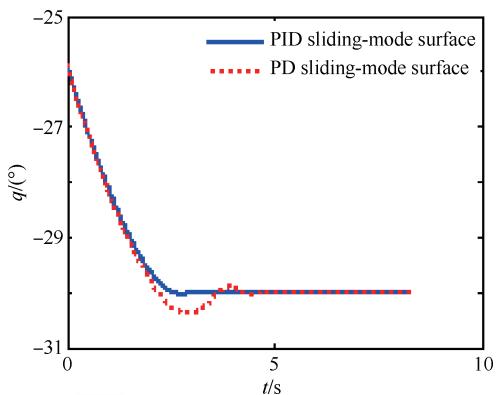


图 9 有随机干扰时 PID 与 PD 滑模面所得视线角对比
Fig. 9 Comparison of LOS angle under PID/PD sliding-mode surfaces with random disturbance

落角控制精度的同时,还能够起到减小超调量的作用。

4 结论

1) 本文提出了一种新的具有终端角度约束的二阶滑模制导律,能够保证制导系统的有限时间稳定性和终端角度约束的要求,并具有较强的鲁棒性。

2) 结合 PID 滑模面与螺旋算法设计制导律时,需要选择合适的 Lyapunov 函数,以证明二阶滑模制导律的有限时间稳定性。

3) 由于制导系统存在模型不确定性和外界干扰,会造成终端角度约束的控制精度降低,这就需要具有强鲁棒性的螺旋算法来消除干扰带来的影响。同时,螺旋算法的快速收敛特性和避免抖振的优点,使得制导系统在保证命中精度的同时,提高了终端角度约束的控制精度。

参 考 文 献

- [1] KIM M, KELLY V G. Terminal guidance for impact attitude angle constrained flight trajectories[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1973, 9(6): 852-859.
- [2] BYUNG S K, JANG G L, HYUNG S K. Biased PNG law for impact with angular constraint[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1998, 34(1): 277-288.
- [3] RATNOO A, GHOSE D. Impact angle constrained interception of stationary targets[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31(6): 1816-1821.

- [4] RATNOO A, GHOSE D. Impact angle constrained interception of nonstationary nonmaneuvering targets[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, 33(1): 269-275.
- [5] CHERRY G. A general explicit optimizing guidance law for rocket-propelled spacecraft[C]//ION Astrodynamics, Guidance and Control Conference. Reston: AIAA, 1964: 638.
- [6] RYOO C K, CHO H, TAHK M J. Optimal guidance laws with terminal impact angle constraint[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005, 28(4): 724-732.
- [7] RATNOO A, GHOSE D. State dependent riccati equation based guidance law for impact angle constrained trajectories[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 32(1): 320-326.
- [8] 张友安, 黄洁, 孙阳平. 带有落角约束的一般加权最优制导律[J]. 航空学报, 2014, 35(3): 848-856.
- ZHANG Y A, HUANG J, SUN Y P. Generalized weighted optimal guidance laws with impact angle constraints [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2014, 35(3): 848-856 (in Chinese).
- [9] ZHANG Q Z, WANG Z B, TAO F. Optimal guidance law design for impact with terminal angle of attack constraint[J]. *Optik—International Journal for Light and Electron Optics*, 2014, 125(1): 243-251.
- [10] IAN R M, ANDREY V S. Circular navigation guidance law for precision missile/target engagements[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, 29(2): 314-320.
- [11] ZHANG Z X, LI S H, LUO S. Terminal guidance laws of missile based on ISMC and NDOB with impact angle constraint[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2013, 31(1): 30-41.
- [12] ZHAO Y, SHENG Y Z, LIU X D. Sliding mode control based guidance law with impact angle constraint[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2014, 27(1): 145-152.
- [13] KUMAR S R, RAO S, GHOSE D. Nonsingular terminal sliding mode guidance with impact angle constraints[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014, 37(4): 214-223.
- [14] WANG X H, WANG J Z. Partial integrated guidance and control with impact angle constraints[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, 38(5): 925-936.
- [15] YURI B S, IIYA A S, ARIE L. Smooth second-order sliding modes: Missile guidance application[J]. *Automatica*, 2007, 43(8): 1470-1476.
- [16] HE S M, LIN D F, WANG J. Continuous second-order sliding mode based impact angle guidance law[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2015, 41: 199-208.
- [17] 窦荣斌, 张科. 基于二阶滑模的再入飞行器末制导律研究[J]. 宇航学报, 2011, 32(10): 2109-2114.
- DOU R B, ZHANG K. Research on terminal guidance for reentry vehicle based on second-order sliding mode control [J]. *Journal of Astronautics*, 2011, 32(10): 2109-2114 (in Chinese).
- [18] ARIE L. Homogeneity approach to high-order sliding mode design[J]. *Automatica*, 2005, 41(5): 823-830.
- [19] ARIE L. Principles of 2-sliding mode design[J]. *Automatica*, 2007, 43(4): 576-586.
- [20] EMELYANOV S V, KOROVIN S K, LEVANTOYSKY L V. Second order sliding modes in controlling uncertain systems[J]. *Soviet Journal of Computer and System Science*, 1986, 24(4): 63-68.
- [21] YURIO, CHRISTOPHER E, LEONID F, et al. Advances in variable structure and sliding mode control[M]. Berlin: Springer, 2006: 127-130.
- [22] JAIME A M, OSORIO M. Strict Lyapunov functions for the supertwisting algorithm[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(4): 1035-1040.
- [23] JESUS P, ENRIC P M, ALEJANDRO V, et al. Stability preserving maps for finite-time convergence: Supertwisting sliding-mode algorithm[J]. *Automatica*, 2013, 49(2): 534-539.
- [24] VADIM U. On convergence time and disturbance rejection of supertwisting control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(8): 2013-2017.
- [25] ARIE L. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control[J]. *International Journal of Control*, 1993, 58(6): 1247-1263.
- [26] EKER İ. Second-order sliding mode control with experimental application[J]. *ISA Transactions*, 2010, 49(3): 394-405.
- [27] MEHDİ G, İMAN M, AHMAD R V. Finite-time convergent guidance law based on integral backstepping control [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2014, 39: 370-376.
- [28] TYAN F. Adaptive PPN guidance law with impact angle constraint[C]//Proceedings of American Control Conference. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2013: 19-24.
- [29] CHEN H, SUN W J, SUN Z D, et al. Second-order sliding mode control of a 2D torsional MEMS micromirror with sidewall electrodes[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2012, 23(1): 234-239.
- [30] JOE H, KIM M, YU S. Second-order sliding-mode controller for autonomous underwater vehicle in the presence of unknown disturbances[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(1): 183-196.
- [31] ANDIRE P, ALEX P. Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: “Twisting” controller for

- second-order sliding mode realization[J]. Automatica, 2009, 45(2): 444-448.
- [32] 熊少锋, 王卫红, 刘晓东, 等. 考虑导弹自动驾驶仪动态特性的带攻击角度约束制导律[J]. 控制与决策, 2015, 30(4): 585-592.
- XIONG S F, WANG W H, LIU X D, et al. Impact angle guidance law considering missile's dynamics of autopilot [J]. Control and Decision, 2015, 30(4): 585-592 (in Chinese).

(责任编辑: 张玉)

Second-order sliding-mode guidance law with impact angle constraint

GUO Jianguo^{1,*}, HAN Tuo¹, ZHOU Jun¹, WANG Guoqing²

1. Institute for Precise Guidance and Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

2. Research and Development Center, China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China

Abstract: A new second-order sliding-mode guidance law with finite time stability is proposed for the design of the guidance law for the air-surface missile with impact angle constraint. Based on the relative motion model of the missile and the target, the terminal trajectory inclination angle constraint is transformed to the terminal line of sight (LOS) angle constraint, which is taken as the terminal control goal of the guidance system. In order to satisfy the annihilation of LOS rate and the terminal angle constraint, a second-order sliding mode guidance law is designed by using a new second-order sliding mode surface with twisting control algorithm, which is used to suppress the uncertainty of guiding system. Based on the Lyapunov stability theory, a new Lyapunov function is adopted to verify the strict stability of the guidance system in finite time. The air-surface missile guidance system is simulated numerically. A comparison with the conventional sliding mode guidance law and a second-order sliding mode guidance law using super twisting algorithm shows that the method proposed in this paper can improve the accuracy of terminal angle constraint in finite time and avoid the problem of too many parameters in the super twisting algorithm, and can guarantee the guidance accuracy at the same time.

Keywords: second-order sliding-mode; guidance law; twisting control; angle constraint; finite time stability

Received: 2016-03-09; **Revised:** 2016-04-06; **Accepted:** 2016-05-26; **Published online:** 2016-06-02 10:13

URL: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20160602.1013.006.html

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61473226)

* **Corresponding author.** E-mail: guojianguo@nwpu.edu.cn